

PAUTA CERTAMEN N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Lu 01/12/25**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F La norma espectral de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ es mayor que

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$$

Justificación:

Calculemos la norma espectral de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Calculemos los valores propios de B

$$|B - xI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-x & -3 \\ -3 & 5-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-x)(5-x) - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$10 - 7x + x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49-4}}{2} \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$$

El mayor valor propio de B es $x_1 = \frac{7 + \sqrt{45}}{2}$

Luego la norma espectral de A es $\sqrt{\frac{7 + \sqrt{45}}{2}} \approx 2.62$

Ahora

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} =$$

$$\text{máx.} \{1 + 3 + 2 + 1 + 0, 2 + 1 + 1 + 2 + 2, 5 + 0 + 2 + 1 + 1\} =$$

$$\text{máx.} \{7, 8, 9\} = 9$$

Notamos que la norma espectral es menor que la norma sub-infinito. \square

b) F Si p y q son vectores unitarios perpendiculares de \mathbb{R}^3 , entonces

$$\langle p + q, p - q \rangle + \langle p, p - q \rangle = 3$$

Justificación:

$$\langle p + q, p - q \rangle + \langle p, p - q \rangle =$$

$$\langle p, p \rangle - \langle p, q \rangle + \langle q, p \rangle - \langle q, q \rangle + \langle p, p \rangle - \langle p, q \rangle =$$

$$\|p\|^2 - \langle p, q \rangle + \langle p, q \rangle - \|q\|^2 + \|p\|^2 - \langle p, q \rangle = 1 - 0 + 0 - 1 + 1 - 0 = 1 \neq 3 \quad \square$$

c) F $f[5, -3] = 3$ si $f[2, -3] = 1$ y $f[1, 1] = -1$, con $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Justificación:

Probemos en primer lugar si el conjunto $B = \{[2, -3], [1, 1]\}$ es base de \mathbb{R}^2

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \#(B)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

Lo anterior muestra que B es base de \mathbb{R}^2

Escribamos el vector $[5, -3]$ como combinación lineal de los elementos de B

$$[5, -3] = \alpha_1[2, -3] + \alpha_2[1, 1] \Rightarrow$$

$$5 = 2\alpha_1 + \alpha_2$$

$$-3 = -3\alpha_1 + \alpha_2 / -1$$

$$5 = 2\alpha_1 + \alpha_2$$

$$3 = 3\alpha_1 - \alpha_2$$

$$8 = 5\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{8}{5}$$

$$-3 = -3\alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 3\alpha_1 - 3 \Rightarrow \alpha_2 = 3\frac{8}{5} - 3 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{24}{5} - 3 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{9}{5}$$

$$[5, -3] = \frac{8}{5}[2, -3] + \frac{9}{5}[1, 1] \Rightarrow f[5, -3] = \frac{8}{5}f[2, -3] + \frac{9}{5}f[1, 1] \Rightarrow$$

$$f[5, -3] = \frac{8}{5} \cdot 1 + \frac{9}{5}(-1) \Rightarrow f[5, -3] = \frac{8}{5} - \frac{9}{5} = -\frac{1}{5} \neq 3 \quad \square$$

d) V Los vectores propios del operador lineal T forman una base ortogonal, si $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $T[x, y] = [x + 3y, 3x - 2y]$

Justificación:

Calculemos la matriz asociada con respecto a la base canónica B de \mathbb{R}^2

$$B = \{[1, 0], [0, 1]\}$$

$$T[1, 0] = [1, 3] = a_{11}[1, 0] + a_{21}[0, 1] \Rightarrow a_{11} = 1, a_{21} = 3$$

$$T[0, 1] = [3, -2] = a_{12}[1, 0] + a_{22}[0, 1] \Rightarrow a_{12} = 3, a_{22} = -2$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculemos los valores propios de $[T]_B$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 3 \\ 3 & -2-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a)(-2-a) - 9 = 0 \Rightarrow -2 - a + 2a + a^2 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + a - 11 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+44}}{2} \Rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{45}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{-1 + \sqrt{45}}{2} \\ a_2 = \frac{-1 - \sqrt{45}}{2} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios de $[T]_B$

Para $a_1 = \frac{-1 + \sqrt{45}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2} & 3 \\ 3 & -2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila, se tiene la ecuación

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}\right)v_1 + 3v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{\sqrt{45}}{6} - \frac{1}{2}\right)v_1$$

Para $a_1 = \frac{-1 - \sqrt{45}}{2}$ los vectores propios son

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \left(\frac{\sqrt{45}}{6} - \frac{1}{2}\right)v_1 \end{pmatrix}, v_1 \neq 0$$

Para $a_2 = \frac{-1 - \sqrt{45}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2} & 3 \\ 3 & -2 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2} & 3 \\ 3 & -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila, se tiene la ecuación

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2}\right)w_1 + 3w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = \left(-\frac{\sqrt{45}}{6} - \frac{1}{2}\right)w_1$$

Para $a_2 = \frac{-1 - \sqrt{45}}{2}$ los vectores propios son

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \left(-\frac{\sqrt{45}}{6} - \frac{1}{2}\right)w_1 \end{pmatrix}, w_1 \neq 0$$

Calculemos el producto interior entre \mathbf{v} y \mathbf{w}

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \left(\frac{\sqrt{45}}{6} - \frac{1}{2}\right)v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \left(-\frac{\sqrt{45}}{6} - \frac{1}{2}\right)w_1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$v_1 w_1 + \left(\frac{\sqrt{45}}{6} - \frac{1}{2}\right)v_1 \left(-\frac{\sqrt{45}}{6} - \frac{1}{2}\right)w_1 =$$

$$v_1 w_1 + \left(-\frac{45}{36} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{45}}{6} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{45}}{6} + \frac{1}{4}\right)v_1 w_1 = v_1 w_1 - v_1 w_1 = 0$$

Esto muestra que los vectores propios son ortogonales, por lo que forman una base ortogonal de $\mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$. \square

(40 puntos)

2) Obtenga $[R]_{B_1}^{B_2}$ si se sabe que $B_1 = \{[3, 1], [1, 3]\}$ y $B_2 = \{1 + x, x - 4x^2, x^2 + 2\}$ con $R[a, b] = (a + b)x^2 - bx + a$

Solución:

Probemos en primer lugar que R es lineal

$$\begin{aligned} i) R(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= R([a, b] + [c, d]) = R[a + c, b + d] = \\ &= (a + c + b + d)x^2 - (b + d)x + (a + c) \\ R(\mathbf{v}_1) + R(\mathbf{v}_2) &= R[a, b] + R[c, d] = (a + b)x^2 - bx + a + (c + d)x^2 - dx + c = \\ &= (a + c + b + d)x^2 - (b + d)x + (a + c) \end{aligned}$$

Esto muestra que $R(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = R(\mathbf{v}_1) + R(\mathbf{v}_2)$

$$\begin{aligned} ii) R(\alpha \mathbf{v}) &= R(\alpha[a, b]) = R[\alpha a, \alpha b] = (\alpha a + \alpha b)x^2 - \alpha b x + \alpha a \\ \alpha R(\mathbf{v}) &= \alpha R[a, b] = \alpha((a + b)x^2 - bx + a) = (\alpha a + \alpha b)x^2 - \alpha b x + \alpha a \end{aligned}$$

Esto muestra que $R(\alpha \mathbf{v}) = \alpha R(\mathbf{v})$

De $i)$ y $ii)$ se prueba que R es lineal.

Probemos que $a) B_1$ es base de \mathbb{R}^2 y que $b) B_2$ es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$a) \dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \#(B_1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \neq 0$$

$$b) \dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R})) = 3 = \#(B_2)$$

$$\begin{vmatrix} cte. & x & x^2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 = -7 \neq 0$$

Calculemos la matriz asociada a R con respecto a las bases B_1 y B_2

$$R[3, 1] = 4x^2 - x + 3 = a_{11}(x + 1) + a_{21}(-4x^2 + x) + a_{31}(x^2 + 2) \Rightarrow$$

$$4x^2 - x + 3 = a_{11}x + a_{11} - 4a_{21}x^2 + a_{21}x + a_{31}x^2 + 2a_{31} \Rightarrow$$

$$4x^2 - x + 3 = (-4a_{21} + a_{31})x^2 + (a_{11} + a_{21})x + (a_{11} + 2a_{31}) \Rightarrow$$

$$-4a_{21} + a_{31} = 4$$

$$a_{11} + a_{21} = -1$$

$$a_{11} + 2a_{31} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(-1)+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-4)+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -12 \end{pmatrix}$$

$$-7a_{31} = -12 \Rightarrow a_{31} = \frac{12}{7}$$

$$-a_{21} + 2a_{31} = 4 \Rightarrow a_{21} = 2a_{31} - 4 \Rightarrow a_{21} = \frac{24}{7} - 4 \Rightarrow a_{21} = -\frac{4}{7}$$

$$a_{11} + a_{21} = -1 \Rightarrow a_{11} = -1 - a_{21} \Rightarrow a_{11} = -1 + \frac{4}{7} \Rightarrow a_{11} = -\frac{3}{7}$$

$$R[1, 3] = 4x^2 - 3x + 1 = a_{12}(x + 1) + a_{22}(-4x^2 + x) + a_{32}(x^2 + 2) \Rightarrow$$

$$-4a_{22} + a_{32} = 4$$

$$a_{12} + a_{22} = -3$$

$$a_{12} + 2a_{32} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(-1)+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-4)+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -12 \end{pmatrix}$$

$$-7a_{32} = -12 \Rightarrow a_{32} = \frac{12}{7}$$

$$-a_{22} + 2a_{32} = 4 \Rightarrow a_{22} = 2a_{32} - 4 \Rightarrow a_{22} = \frac{24}{7} - 4 \Rightarrow a_{22} = -\frac{4}{7}$$

$$a_{12} + a_{22} = -3 \Rightarrow a_{12} = -3 - a_{22} \Rightarrow a_{12} = -3 + \frac{4}{7} \Rightarrow a_{12} = -\frac{17}{7}$$

$$[R]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{17}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{12}{7} & \frac{12}{7} \end{bmatrix} \quad \square$$

(10 puntos)

3) Obtenga:

a) el recorrido de la función lineal $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $R[x, y] = [3x - y, x + y]$

Solución:

$$Nuc(R) = \{[x, y] / R[x, y] = [0, 0]\} = \{[x, y] / [3x - y, x + y] = [0, 0]\}$$

$$3x - y = 0$$

$$x + y = 0$$

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 3x = 0$$

Luego $Nuc(R) = \{[0, 0]\}$, es decir, $dim(Nuc(R)) = 0$

Ahora sabemos que $dim(Nuc(R)) + dim(Rec(R)) = dim(V)$, es decir,

$$0 + \dim(\text{Rec}(R)) = \dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \dim(\text{Rec}(R)) = 2$$

Por otro lado, $\dim(\text{Cod}(R)) = 2$, por lo que el recorrido de R es \mathbb{R}^2 porque el recorrido y el codominio de R tienen la misma dimensión y uno es subespacio vectorial del otro. \square

b) el núcleo de la función lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T[x, y, z] = [3x - y, 3y - z, -2z - 6x]$$

Solución:

$$\text{Nuc}(T) = \{[x, y, z] / T[x, y, z] = [0, 0, 0]\} =$$

$$\{[x, y, z] / [3x - y, 3y - z, -2z - 6x] = [0, 0, 0]\}$$

$$3x - y = 0 \Rightarrow y = 3x$$

$$3y - z = 0 \Rightarrow 9x - z = 0 \Rightarrow z = 9x$$

$$-2z - 6x = 0 \Rightarrow -18x - 6x = 0 \Rightarrow -24x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$z = 9x = 0$$

$$y = 3x = 0$$

$$\text{Finalmente, } \text{Nuc}(T) = \{[0, 0, 0]\} \quad \square$$

(10 puntos)