

PAUTA CERTAMEN N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Ju 28/11/24**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Si $P : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es una transformación lineal tal que $P(A) = MA$, con $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces P posee inversa.

Justificación:

$$P(A) = MA \Rightarrow P\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

Calculemos el núcleo de P

$$\begin{aligned} Nuc(P) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / P\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$a+c=0 \Rightarrow a = -c$$

$$b+d=0 \Rightarrow b = -d$$

Observamos que el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones; esto significa que $Nuc(P) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, por lo que P no es una función inyectiva y por lo tanto no posee inversa. $\square$

b) V $\dim(Nuc(T)) = 1$ si T es lineal y $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es tal que $T[x, y] = [x - y, y - x]$

Justificación:

$$Nuc(T) = \{[x, y] / T[x, y] = [0, 0]\} = \{[x, y] / [x - y, y - x] = [0, 0]\}$$

$$x - y = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

$$y - x = 0 \Rightarrow -x + y = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

Observamos que el sistema posee infinitas soluciones, a saber $x = y$, con y la variable que fijamos.

$$\text{Luego, } Nuc(T) = \{[y, y], y \in \mathbb{R}\} = \{y[1, 1], y \in \mathbb{R}\}$$

De lo anterior, concluimos que $B = \{[1, 1]\}$ es base del núcleo de T , pues es un solo vector distinto del nulo, por lo que $\dim(Nuc(T)) = 1$ $\square$

c) V $B = \{[1, -1], [a, a]\}$, con $a \neq 0$, es siempre base de $\mathbb{R}^2$

Justificación:

Notemos que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \#(B)$. Falta probar que B es l.i.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a & a \end{vmatrix} = a + a = 2a \neq 0$$

Esto muestra que B es l.i., por tanto es siempre base de $\mathbb{R}^2$, con $a \neq 0$ $\square$

d) F $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es ortogonal con $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Justificación:

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Traza} \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Traza} \left(\begin{pmatrix} 10 & \\ & -5 \end{pmatrix} \right) = 5 \neq 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que las matrices dadas no son ortogonales. $\square$

e) V Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \theta$. Tenemos que si $\mathbf{u}$ es un vector cualquiera, entonces $\mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$

Justificación:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \|\mathbf{v}\|^2 = \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

(50 puntos)

2) Obtenga una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$, diferente de la canónica y sus derivados.

(10 puntos)

Solución:

Sea $B_1 = \{[1, 1], [-1, 1]\}$

Mostremos que B_1 es base de $\mathbb{R}^2$

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \#(B_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Esto muestra que B_1 es base de $\mathbb{R}^2$

Mostremos que los vectores son ortogonales

$$\langle [1, 1], [-1, 1] \rangle = 1 - 1 = 0$$

Para obtener una base ortonormal a partir de B_1 debemos dividir cada vector del conjunto por su norma, es decir

$$B_2 = \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \right\}$$

El conjunto B_2 es base ortonormal para $\mathbb{R}^2$ $\square$