

**PAUTA CERTAMEN N° 3 ÁLGEBRA LINEAL**  
**INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

**NOMBRE :** \_\_\_\_\_ **CARRERA:** \_\_\_\_\_  
**TIEMPO MÁXIMO : 1HORA 40 MINUTOS** **FECHA : Vi 02/12/22**

Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) V Si  $T$  es una función lineal biyectiva de  $V$  en  $\mathbb{R}^4$ , entonces toda base de  $V$  contiene 4 elementos.

**Justificación:**

Dado que  $T$  es biyectiva, es inyectiva ( $\dim(\text{Nuc}(T)) = 0$ ) y sobreyectiva ( $\dim(\text{Rec}(T)) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ )

Usando el teorema de las dimensiones

$$\dim(\text{Nuc}(T)) + \dim(\text{Rec}(T)) = \dim(V) \Rightarrow 0 + 4 = \dim(V) \Rightarrow \dim(V) = 4$$

Esto muestra que toda base de  $V$  contiene 4 elementos.  $\square$

b) V La transformación  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f[x, y] = [-y, -x]$  posee inversa.

**Justificación:**

En primer lugar debemos verificar si  $f$  es lineal o no.

$$i) f([a, b] + [c, d]) = f([a + c, b + d]) = [-b - d, -a - c]$$

$$f[a, b] + f[c, d] = [-b, -a] + [-d, -c] = [-b - d, -a - c]$$

$$ii) f(\alpha[a, b]) = f([\alpha a, \alpha b]) = [-\alpha b, -\alpha a]$$

$$\alpha f[a, b] = \alpha[-b, -a] = [-\alpha b, -\alpha a]$$

Lo anterior muestra que  $f$  es lineal.

Calculemos el núcleo de  $f$ .

$$\text{Nuc}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (0, 0)\} =$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (-y, -x) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0, x = 0\} = \{(0, 0)\}$$

Lo anterior significa que  $f$  es inyectiva.

Usando el teorema de las dimensiones.

$$\dim(\text{Nuc}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) \Rightarrow 0 + \dim(\text{Im}(f)) = 2 \Rightarrow$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 2$$

y como  $Im(f) \leq \mathbb{R}^2$ , y ambos conjuntos tienen la misma dimensión, entonces deben ser iguales, es decir,  $Im(f) = \mathbb{R}^2$ , por lo tanto,  $f$  es sobreyectiva. Dado que  $f$  es inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva y posee inversa.  $\square$

c) V La función lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T[x, y] = [x + y, x - y]$  solo posee valores propios irracionales.

**Justificación:**

Calculemos la matriz asociada a  $T$  usando las bases  $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$  y  $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

$$T(1, 0) = (1 + 0, 1 - 0) = (1, 1) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1) \Rightarrow a_{11} = 1; a_{21} = 1$$

$$T(0, 1) = (0 + 1, 0 - 1) = (1, -1) = a_{12}(1, 0) + a_{22}(0, 1) \Rightarrow a_{12} = 1; a_{22} = -1$$

$$\therefore [T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculemos los valores propios asociados a  $T$ .

$$|[T]_{B_1}^{B_2} - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$-1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{2} \\ \lambda_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Observamos que ambos valores propios son irracionales  $\square$

d) V Sea  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{v} \neq \theta$ . Tenemos que si  $\mathbf{u}$  es un vector cualquiera, entonces  $\mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$  es ortogonal a  $\mathbf{v}$ .

**Justificación:**

$$\langle \mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle =$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \neq \theta \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \square$$

e) V Existe al menos un vector en  $\mathbb{R}^3$  que es unitario y además perpendicular a  $[1, -1, 3]$ .

**Justificación:**

Sea  $\mathbf{w} = [1, 2, a]$  el vector perpendicular a  $\mathbf{v} = [1, -1, 3]$

Luego :  $\langle w, v \rangle = \langle [1, 2, a], [1, -1, 3] \rangle = 1 - 2 + 3a = 0 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Por lo tanto :  $w = [1, 2, \frac{1}{3}]$ . Este vector no es unitario, y para lograr que lo sea debemos dividirlo por su norma.

$$w^* = \frac{w}{\|w\|} = \frac{[1, 2, \frac{1}{3}]}{\|[1, 2, \frac{1}{3}]\|} = \frac{[1, 2, \frac{1}{3}]}{\sqrt{1+4+\frac{1}{9}}} = \frac{[1, 2, \frac{1}{3}]}{\sqrt{\frac{46}{9}}} = \left[ \frac{3}{\sqrt{46}}, \frac{6}{\sqrt{46}}, \frac{1}{\sqrt{46}} \right]$$

El vector  $w^*$  es unitario y además perpendicular a  $[1, -1, 3]$   $\square$

f) V  $\dim(T) > \dim(S)$ , donde  $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \text{ es antisimétrica}\}$  y  $T = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \text{ es simétrica}\}$

**Justificación:**

$$S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \text{ es antisimétrica}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  es base de  $S$ , pues genera al espacio y además es l.i., luego  $\dim(S) = 1$

$$T = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \text{ es simétrica}\} = \left\{ \begin{pmatrix} b & c \\ c & d \end{pmatrix}; b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  es un aspirante a base para  $T$ . Falta mostrar que es l.i.

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0$$

Luego  $M$  es l.i. y base de  $T$ , es decir,  $\dim(T) = 3$

Finalmente,  $\dim(T) = 3 > \dim(S) = 1$   $\square$

(60 puntos)