

PAUTA CERTAMEN N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Ju 25/06/26**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) V $\{[1, 3], [2, 1], [3, 1]\}$ es l.d.

Justificación:

$$a[1, 3] + b[2, 1] + c[3, 1] = [0, 0] \Rightarrow$$

$$a + 2b + 3c = 0$$

$$3a + b + c = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow F_1(-3)+F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

Observamos que $r_A = r_{A \cdot b} = 2 < n = 3$. Esto muestra que el sistema posee infinitas soluciones, por lo que el conjunto dado es l.d. $\square$

b) V $\{proy_a \mathbf{b}, proy_b \mathbf{a} \times 2\mathbf{i}, \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \mathbf{b} - \mathbf{a}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, si $\mathbf{a} = [1, -1, 0]$ y $\mathbf{b} = [0, -1, 1]$

Justificación:

Sabemos que $\dim(\mathbb{R}^3)$ que coincide con la cardinalidad del conjunto dado. Falta probar que el conjunto es l.i.

$$proy_a \mathbf{b} = \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \frac{\langle [0, -1, 1], [1, -1, 0] \rangle}{\|[1, -1, 0]\|^2} [1, -1, 0] = \frac{1}{2} [1, -1, 0] = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right]$$

$$proy_b \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} = \frac{\langle [1, -1, 0], [0, -1, 1] \rangle}{\|[0, -1, 1]\|^2} [0, -1, 1] = \frac{1}{2} [0, -1, 1] = \left[0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$2\mathbf{i} = 2[1, 0, 0] = [2, 0, 0]$$

$$proy_b \mathbf{a} \times 2\mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = [0, 1, 1]$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| &= \|[1, -1, 0] - [0, -1, 1]\| \|[0, -1, 1] - [1, -1, 0]\| = \\ &= \|[1, 0, -1]\| \|[0, -1, 1] - [1, -1, 0]\| = \sqrt{2} \|[0, -1, 1] - [1, -1, 0]\| = \\ &= \|[0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}]\| - [1, -1, 0] = [-1, -\sqrt{2} + 1, \sqrt{2}]\end{aligned}$$

Calculemos la determinante de la matriz que se forma con los vectores ya obtenidos.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} + 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} \neq 0$$

Esto muestra que el conjunto dado es base de $\mathbb{R}^3$ $\square$

c) F Los vectores propios de la matriz asociada al operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T[x, y] = [y, x]$ poseen componentes mayores que $1 - \sqrt{12}$, considerando las bases canónicas.

Justificación:

La base canónica para $\mathbb{R}^2$ es $B = \{[1, 0], [0, 1]\}$

$$T[1, 0] = [0, 1] = a_{11}[1, 0] + a_{21}[0, 1] \Rightarrow a_{11} = 0, a_{21} = 1$$

$$T[0, 1] = [1, 0] = a_{12}[1, 0] + a_{22}[0, 1] \Rightarrow a_{12} = 1, a_{22} = 0$$

$$\text{Luego: } [T]_{BB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores propios de $[T]_{BB}$

$$\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios

Para $x_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -x_1 & 1 \\ 1 & -x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow$$

$$b = a$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \text{ con } a \neq 0$$

Ahora, si $a = -5$, entonces el vector propio asociado $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ posee componentes menores que $1 - \sqrt{12} \approx -2.5$. $\square$

d) V Las matrices simétricas de orden 2 siempre son ortogonales a las matrices antisimétricas de orden 2

Justificación:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2 simétrica cualquiera y sea $B = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix}$ una matriz de orden 2 antisimétrica cualquiera.

Tenemos que :

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \text{Traza}(B^T A) = \text{Traza} \left(\begin{pmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right) = \\ &= \text{Traza} \left(\begin{pmatrix} -db & -dc \\ da & db \end{pmatrix} \right) = -db + db = 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que las matrices simétricas de orden 2 siempre son ortogonales a las matrices antisimétricas de orden 2 $\square$

(40 puntos)

2) Teorema : Sea V un espacio vectorial tal que $\dim(V) = n$. Si una transformación lineal $T : V \rightarrow V$ tiene n vectores propios l.i., entonces T es diagonalizable.

Usando el teorema anterior, verifique si la transformación lineal

$$T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$$

$$p(x) \mapsto T(p(x))(t) = (t^2 - 1)p(1) + (t + 1)p'(1)$$

es diagonalizable.

Indicación: Calcule los valores y vectores propios de la matriz asociada a la transformación usando la base canónica.

(20 puntos)

Solución:

Sea $B = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Determinemos la matriz A asociada a la transformación lineal T con respecto a esta base.

$$T(1)(t) = (t^2 - 1)1 + (t + 1)0 = t^2 - 1 = -1 + 0t + 1t^2$$

$$T(x)(t) = (t^2 - 1)1 + (t + 1)0 = t^2 - 1 = -1 + 0t + 1t^2$$

$$T(x^2)(t) = (t^2 - 1)1^2 + (t + 1)2 = t^2 + 2t + 1 = 1 + 2t + 1t^2$$

$$\therefore A = [T]_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtengamos los valores propios de A .

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I| = 0 &\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \\
\left| \begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \Rightarrow \\
-\lambda(-1-\lambda)(1-\lambda) - 2 + \lambda - 2(-1-\lambda) &= 0 \Rightarrow \\
\lambda(1+\lambda)(1-\lambda) - 2 + \lambda + 2 + 2\lambda &= 0 \Rightarrow \lambda(1+\lambda)(1-\lambda) + 3\lambda = 0 \Rightarrow \\
\lambda[(1+\lambda)(1-\lambda) + 3] &= 0 \Rightarrow \lambda[1 - \lambda^2 + 3] = 0 \Rightarrow \lambda[4 - \lambda^2] = 0 \Rightarrow \\
\lambda(2-\lambda)(2+\lambda) &= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios son $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$

Calculemos los vectores propios asociados.

Para $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_1 I) \mathbf{v}_1 &= \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_1(-1)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-1)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
v_{11} - v_{12} + v_{13} &= 0 \Rightarrow v_{11} = v_{12} - v_{13} \Rightarrow v_{11} = v_{12} + v_{12} \Rightarrow v_{11} = 2v_{12} \\
2v_{12} + 2v_{13} &= 0 \Rightarrow v_{13} = -v_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2v_{12} \\ v_{12} \\ -v_{12} \end{bmatrix} = v_{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_{12} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda_2 I) \mathbf{v}_2 &= \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_1(1)+F_3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-1)+F_3} \\
\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \\
-v_{21} - v_{22} + v_{23} &= 0 \Rightarrow v_{21} = v_{23} - v_{22} \Rightarrow v_{21} = -v_{22} \\
2v_{23} &= 0 \Rightarrow v_{23} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_{22} \\ v_{22} \\ 0 \end{bmatrix} = v_{22} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{22} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_3 = 2$:

$$(A - \lambda_3 I) \mathbf{v}_3 = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(3)+F_1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(1)+F_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-2v_{32} + 2v_{33} = 0 \Rightarrow v_{33} = v_{32}$$

$$v_{31} + v_{32} - v_{33} = 0 \Rightarrow v_{31} = v_{33} - v_{32} \Rightarrow v_{31} = v_{32} - v_{32} \Rightarrow v_{31} = 0$$

$$\begin{bmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{32} \\ v_{32} \end{bmatrix} = v_{32} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_{32} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por lo tanto, los valores y vectores propios son:

$$\lambda_1 = -2 ; p_1(x) = 2 + x - x^2$$

$$\lambda_2 = 0 ; p_2(x) = -1 + x$$

$$\lambda_3 = 2 ; p_3(x) = x + x^2$$

Verifiquemos si $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ es l.i.

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1(2 + x - x^2) + \alpha_2(-1 + x) + \alpha_3(x + x^2) = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha_3 - \alpha_1)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x + (2\alpha_1 - \alpha_2) = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_3 - \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_1 + \alpha_1 = 0 \Rightarrow 4\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

De lo anterior, se concluye que P es l.i., y finalmente T es diagonalizable. $\square$