

PAUTA CERTAMEN N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Lu 14/07/25**

(1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) V Los vectores propios de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ forman siempre una base para $\mathbb{R}^2$, si tales vectores son considerados como vectores fila.

Justificación:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-\lambda)(3 - \lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios

Para $\lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & 3 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)a + b = 0$$

$$\Rightarrow \text{Fija } b = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)a, \text{ con } a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Finalmente, el primer vector propio (que en realidad es una infinidad de vectores propios) es:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)a \end{bmatrix}, \text{ con } a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & 3 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right) c + d = 0 \\ \Rightarrow \text{Fijo } c &= \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right) c, \text{ con } c \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Finalmente, el segundo vector propio (que en realidad es una infinidad de vectores propios) es:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right) c \end{bmatrix}, \text{ con } c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Veamos ahora si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ forman una base para $\mathbb{R}^2$, para ello falta probar que forman un conjunto l.i. porque $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \#(B)$, donde

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right) a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right) c \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right) a \\ c & \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right) c \end{vmatrix} &= \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \right) ac - \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \right) ac \\ &= \frac{3}{2} ac + \frac{\sqrt{13}}{2} ac - \frac{3}{2} ac + \frac{\sqrt{13}}{2} ac = \sqrt{13} ac \neq 0, \text{ porque } a \neq 0 \text{ y } c \neq 0 \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que los vectores propios de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ forman siempre una base para $\mathbb{R}^2$, si tales vectores son considerados como vectores fila. $\square$

b) F La distancia entre una matriz antisimétrica de orden 2 con otra simétrica del mismo orden, distintas de la nula, siempre es mayor o igual que 1

Justificación:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \text{ una matriz antisimétrica de orden 2 y sea } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

una matriz simétrica de orden 2.

Calculemos la distancia d entre las matrices anteriores

$$d(A, B) = \|A - B\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} < 1 \quad \square$$

c) V Los valores propios del operador lineal T son irracionales, si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $T[x, y] = [x + y, 2x - y]$

Justificación:

Consideremos la base canónica B para $\mathbb{R}^2$, es decir, $B = \{[1, 0], [0, 1]\}$

$$T[1, 0] = [1, 2] = a_{11}[1, 0] + a_{21}[0, 1] \Rightarrow a_{11} = 1; a_{21} = 2$$

$$T[0, 1] = [1, -1] = a_{12}[1, 0] + a_{22}[0, 1] \Rightarrow a_{12} = 1; a_{22} = -1$$

Luego

$$[T]_{BB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculemos los valores propios de $[T]_{BB}$

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 2 & -1-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a)(-1-a) - 2 = 0 \Rightarrow -1-a+a+a^2-2=0$$

$$\Rightarrow a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \sqrt{3} \\ a_2 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Esto muestra que los valores propios del operador lineal T son efectivamente irracionales. $\square$

d) V Si $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$, entonces $\dim(S) = 2$

Justificación:

Obtengamos una base para S .

$$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / z = x - y\} =$$

$$\{[x, y, x - y]\} = \{x[1, 0, 1] + y[0, 1, -1]\}$$

Notamos que $B = \{[1, 0, 1], [0, 1, -1]\}$ es un conjunto que genera a S , pues todos los elementos de S se pueden escribir como combinación lineal de los elementos de B .

Veamos si B es l.i.

$$\alpha_1[1, 0, 1] + \alpha_2[0, 1, -1] = [0, 0, 0] \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0$$

La solución del sistema anterior es $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, luego B es l.i. y por lo tanto base de S .

Finalmente $\dim(S) = 2$, pues la dimensión de un espacio vectorial es el número de elementos de una base cualquiera. $\square$

e) F Si $\mathbf{a} = [1, 1, 1]$ y $\mathbf{b}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$, entonces $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

Justificación:

Sea $\mathbf{b} = [0, 0, 0]$

Tenemos que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$

El conjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$ no puede ser base, pues contiene al vector nulo del espacio. $\square$

(50 puntos)

(2) Obtenga una función lineal biyectiva de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ a $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

(10 puntos)

Solución:

Sea $f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $f(ax + b) = ax + b$

i) f es lineal

$$\begin{aligned} f(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) &= f(\alpha(ax + b) + \beta(cx + d)) = f(\alpha ax + \beta cx + \alpha b + \beta d) = \\ &= f((\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)) = (\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha f(\mathbf{v}) + \beta f(\mathbf{w}) &= \alpha f(ax + b) + \beta f(cx + d) = \alpha(ax + b) + \beta(cx + d) = \\ &= \alpha ax + \beta cx + \alpha b + \beta d = (\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d) \end{aligned}$$

ii) f es inyectiva

$$\begin{aligned} \text{Nuc}(f) &= \{\mathbf{v} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) / f(\mathbf{v}) = 0x + 0\} = \{ax + b \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) / f(ax + b) = 0x + 0\} = \\ &= \{ax + b \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) / ax + b = 0x + 0\} = \{0x + 0\} \end{aligned}$$

iii) f es sobreyectiva

$$\begin{aligned} \dim(\text{Nuc}(f)) + \dim(\text{Rec}(f)) &= \dim(\mathcal{P}_1(\mathbb{R})) \Rightarrow 0 + \dim(\text{Rec}(f)) = 2 \Rightarrow \\ \dim(\text{Rec}(f)) &= 2 \end{aligned}$$

Ahora como $\text{Rec}(f) \leq \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y tienen la misma dimensión, se concluye que $\text{Rec}(f) = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ $\square$