

Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Lu 24/06/24**

(1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \theta$. Tenemos que si $\mathbf{u}$ es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$, entonces $\left\{ \mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \mathbf{v}, \left(\mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{v} \right\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

Justificación:

Sea $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$

Si $\mathbf{u} = [0, 0, 0] \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} = [0, 0, 0] - \frac{\langle [0, 0, 0], [v_1, v_2, v_3] \rangle}{\|[v_1, v_2, v_3]\|^2} [v_1, v_2, v_3] =$$

$$[0, 0, 0] - \frac{0}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} [v_1, v_2, v_3] = [0, 0, 0] - 0[v_1, v_2, v_3] = [0, 0, 0] - [0, 0, 0] = [0, 0, 0]$$

Sabemos que una base no puede contener al vector nulo del espacio porque pasaría a ser un conjunto l. d., por lo que si $\mathbf{u} = [0, 0, 0] \in \mathbb{R}^3$, entonces el conjunto $\left\{ \mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \mathbf{v}, \left(\mathbf{u} - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v} \right) \times \mathbf{v} \right\}$ no es base de $\mathbb{R}^3$ $\square$

b) V $\{[1, 3], [2, 1], [3, 1]\}$ es l.d.

Justificación:

$$a[1, 3] + b[2, 1] + c[3, 1] = [0, 0] \Rightarrow$$

$$a + 2b + 3c = 0$$

$$3a + b + c = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow F_1(-3)+F_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \end{array} \right]$$

$$r_A = 2 = r_{Ab} < N = 3$$

Como el sistema homogéneo posee infinitas soluciones el conjunto dado inicialmente es l.d. $\square$

c) F Los valores propios del operador lineal T son irracionales, si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $T[x, y] = [2x - y, 6x - 2y]$

Justificación:

Consideremos la base canónica B para $\mathbb{R}^2$, es decir, $B = \{[1, 0], [0, 1]\}$

$$T[1, 0] = [2, 6] = a_{11}[1, 0] + a_{21}[0, 1] \Rightarrow a_{11} = 2; a_{21} = 6$$

$$T[0, 1] = [-1, -2] = a_{12}[1, 0] + a_{22}[0, 1] \Rightarrow a_{12} = -1; a_{22} = -2$$

Luego

$$[T]_{BB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculemos los valores propios de $[T]_{BB}$

$$\begin{vmatrix} 2-a & -1 \\ 6 & -2-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-a)(-2-a) + 6 = 0 \Rightarrow -4 - 2a + 2a + a^2 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 2 = 0 \Rightarrow a^2 = -2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \sqrt{2}i \\ a_2 = -\sqrt{2}i \end{cases}$$

Esto muestra que los valores propios del operador lineal T son complejos y no irracionales. $\square$

d) V Si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un operador lineal tal que $[T]_{BB}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, con

$B = \{[1, 1], [-1, 1]\}$, entonces $T[-2, 2] \neq \theta$

Justificación:

$$\text{Tenemos que } [T]_{BB} = ([T]_{BB}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Probemos que B es base de $\mathbb{R}^2$. Notamos que $\#(B) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Falta probar que es l.i.; para ello calculamos el determinante asociado

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Dado que el determinante es distinto de cero, B es l.i., y por lo tanto base.

Ahora

$$T[1, 1] = a_{11}[1, 1] + a_{21}[-1, 1] = 1[1, 1] - 1[-1, 1] = [1, 1] + [1, -1] = [2, 0]$$

$$T[-1, 1] = a_{12}[1, 1] + a_{22}[-1, 1] = -1[1, 1] + 2[-1, 1] = [-1, -1] + [-2, 2] = [-3, 1]$$

$$\text{Ahora } T[-2, 2] = T(2[-1, 1]) = 2T[-1, 1] = 2[-3, 1] = [-6, 2] \neq \theta \quad \square$$

e) V Las matrices simétricas de orden 2 siempre son ortogonales a las matrices antisimétricas de orden 2

Justificación:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Traza} \left(\begin{pmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right) =$$

$$\text{Trazas} \begin{pmatrix} -db & -dc \\ da & db \end{pmatrix} = -db + db = 0 \quad \square$$

(30 puntos)

(2) Obtenga

a) La longitud de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) La distancia entre los vectores

$$\langle [1, 2, 4], [1, 1, 1] \rangle = [-1, -1, 2] \quad \text{y} \quad [4, -1, 2] \times [1, 1, 0]$$

c) El producto interno entre $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

d) Una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ que incluya al vector $[1, -2, 0]$

e) Un conjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea l.i. y ortogonal

f) Un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

g) $\|x + 3y\|$, con $x = 5x^2 - 4x - 1$ y $y = x + 3$

h) $\langle a + b, a - b \rangle$, donde $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2$

i) dos vectores no nulos perpendiculares en $\mathbb{R}^5$

j) un conjunto l.d. en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que no contenga al vector nulo

(30 puntos)

Solución:

a) $\left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1+1+1+4+1+9+1+1+1} = \sqrt{20} \quad \square$

b) $\langle [1, 2, 4], [1, 1, 1] \rangle = [-1, -1, 2] = (1+2+4)[-1, -1, 2] = 7[-1, -1, 2] = [-7, -7, 14]$

$[4, -1, 2] \times [1, 1, 0] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [-2, 2, 5]$

$d([-7, -7, 14], [-2, 2, 5]) = \|[-2, 2, 5] - [-7, -7, 14]\| = \|[5, 9, -9]\| = \sqrt{25+81+81} = \sqrt{187} \quad \square$

c) No se puede calcular el producto interior entre matrices de distinto orden $\square$

d) $\langle [1, -2, 0], [2, 1, 0] \rangle = 2 - 2 = 0$

$[1, -2, 0] \times [2, 1, 0] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 5]$

Tenemos que el conjunto $B = \{[1, -2, 0], [2, 1, 0], [0, 0, 5]\}$ es ortogonal

Veamos si el base. Dado que $\dim(\mathbb{R}^3) = \#(B)$, fata probar que B es l.i.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 20 = 25 \neq 0$$

De lo anterior B es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

Dividamos cada vector por su norma para generar una base ortonormal.

$$B_2 = \left\{ \frac{[1, -2, 0]}{\sqrt{5}}, \frac{[2, 1, 0]}{\sqrt{5}}, \frac{[0, 0, 5]}{5} \right\} = \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right], \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0 \right], [0, 0, 1] \right\}$$

B_2 es base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ $\square$

e) $B = \{[1, 0], [0, 1]\}$ es un conjunto l.i. y además ortogonal. $\square$

f) El conjunto $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \text{ es antisimétrica}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pues la suma de dos matrices antisimétricas es una matriz antisimétrica y el producto de una matriz antisimétrica por un escalar es también una matriz antisimétrica. $\square$

g) $\|x + 3y\|$, con $x = 5x^2 - 4x - 1$ y $y = x + 3$

$$\begin{aligned} \|x + 3y\| &= \|(5x^2 - 4x - 1) + 3(x + 3)\| = \|5x^2 - 4x - 1 + 3x + 9\| = \\ &= \|5x^2 - x + 8\| = \sqrt{25 + 1 + 64} = \sqrt{90} \end{aligned} \quad \square$$

$$h) a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \langle a + b, a - b \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Traza} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Traza} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 6 \end{aligned} \quad \square$$

i) $[1, 1, 1, 1, 0]$ y $[-1, 1, -1, 1, 0]$, pues

$$\langle [1, 1, 1, 1, 0], [-1, 1, -1, 1, 0] \rangle = -1 + 1 - 1 + 1 + 0 = 0 \quad \square$$

j) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto l.d. porque contiene dos vectores iguales $\square$