UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 3 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Ju 07/07/22

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ __**V**____ Si $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ es l.i., entonces $\{3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}\}$ también lo es.

Justificación:

Si $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ es l.i., entonces : $\alpha\, \boldsymbol{a} + \beta\, \boldsymbol{b} + \gamma\, \boldsymbol{c} = \theta_V \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$\alpha_1(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) + \alpha_2(\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}) + \alpha_3(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}) = \theta_V \Rightarrow$
$(3\alpha_1+2\alpha_3)\boldsymbol{a} + (2\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{b} + (3\alpha_2+5\alpha_3)\boldsymbol{c} = \theta_V \Rightarrow$

$3\alpha_2+5\alpha_3 = 0 \Rightarrow 3(-2\alpha_1)+5(-\frac{3}{2}\,\alpha_1) = 0 \Rightarrow -6\alpha_1 - \frac{15}{2}\,\alpha_1 = 0 \Rightarrow$
$-\frac{15}{2}\,\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$
$3\alpha_1+2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\frac{3}{2}\,\alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$
$2\alpha_1+\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

Dado que todos los escalares $\alpha_i,\ i = 1,2,3,$ son ceros, entonces $\{3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}\}$ es l.i. ❑

$b)$ ___**V**___ Si $S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 /\, x-2y+3z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$, entonces $dim(S) = 2$

Justificación:

$S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 /\, x-2y+3z = 0\} = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 /\, x = 2y-3z\} =$
$\{[2y-3z, y, z];\ y,z \in \mathbb{R}\} = \{y[2,1,0] + z[-3,0,1];\ y,z \in \mathbb{R}\}$

Observamos que el conjunto $B = \{[2,1,0], [-3,0,1]\}$ genera a S, porque todo vector de S se escribe como combinación lineal de los elementos de B.
Para que B sea base de S, falta mostrar que es un conjunto l.i.
$\alpha[2,1,0] + \beta[-3,0,1] = [0,0,0] \Rightarrow$
$2\,\alpha - 3\,\beta = 0 \Rightarrow 0+0 = 0$
$\alpha = 0$
$\beta = 0$

Lo anterior muestra que B es l.i., y por lo tanto base de S, es decir $dim(S) = 2$, pues una base de S posee dos elementos. ❑

c) ___**V**__ La función lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ f[x,y,z] = [x-5y, x+3y, 2z-y+2x]$ posee inversa.

Justificación:

La inversa de f existe, si f es inyectiva y sobreyectiva.
f es inyectiva si $Nuc(f) = \{[0,0,0]\}$
f es sobreyectiva si $Rec(f) = \mathbb{R}^3$
Calculemos $Nuc(f)$
$Nuc(f) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 / f[x,y,z] = [0,0,0]\} =$
$\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 / [x-5y, x+3y, 2z-y+2x] = [0,0,0]\}$
$x - 5y = 0$
$x + 3y = 0$
$2z - y + 2x = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & : & 0 \\ 1 & 3 & 0 & : & 0 \\ 2 & -1 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_1(-1)+F_2;\, F_1(-2)+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & : & 0 \\ 0 & 8 & 0 & : & 0 \\ 0 & 9 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_2(-9/8)+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & : & 0 \\ 0 & 8 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 2 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$r_A = 3 = r_{Ab} = N$

Esto muestra que el sistema posee una solución, y que es la nula, es decir, $Nuc(f) = \{[0,0,0]\}$, por lo que f es inyectiva.

Ahora usaremos el teorema de las dimensiones para obtener $Rec(f)$, recordando que si $Nuc(f) = \{[0,0,0]\}$, entonces $dim(Nuc(f)) = 0$
$dim(V) = dim(Nuc(f)) + dim(Rec(f)) \Rightarrow$
$dim(\mathbb{R}^3) = dim(Nuc(f)) + dim(Rec(f)) \Rightarrow 3 = 0 + dim(Rec(f)) \Rightarrow$
$dim(Rec(f)) = 3$

Dado que $Rec(f) \leq W = \mathbb{R}^3$, y ambos espacios tienen la misma dimensión, entonces $Rec(f) = \mathbb{R}^3$, por lo que f es sobreyectiva.

Sabiendo que f es inyectiva y sobreyectiva, se conluye que f posee inversa. ❑

(30 puntos)

2) Determine **si l**os vectores propios de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ forman siempre una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$, si tales vectores son considerados como vectores fila.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Calculemos los valores propios de A

$$\begin{vmatrix} 1-a & -1 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a)(2-a)-1=0 \Rightarrow 2-3a+a^2-1=0 \Rightarrow$$

$$a^2-3a+1=0 \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ a_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios

Para $a_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-a_1 & -1 \\ -1 & 2-a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 2-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-x + \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y = 0 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y \\ y \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $a_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1-a_2 & -1 \\ -1 & 2-a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 2-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-v + \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)w = 0 \Rightarrow v = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)w$$

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)w \\ w \end{pmatrix}, \ w \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Luego el conjunto B está formado por

$$B = \left\{ \left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y, y\right], \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)w, w\right] \right\}$$

con y y w constantes distintas de cero.

Veamos si B es un conjunto ortogonal.
$\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y, y\right] \cdot \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)w, w\right] = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)y\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)w + yw =$
$\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{5}{4}\right)yw + yw = -yw + yw = 0$

Veamos si B es base de $\mathbb{R}^2$
Tenemos $dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \#(B)$ y además
$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5} \neq 0$
Esto muestra que B es base de $\mathbb{R}^2$ ❑

(15 puntos)

3) Calcule los valores propios del operador T, si $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $T[x,y] = [2x+3y, 6x-2y]$
<u>Solución:</u>
En primer lugar debemos mostrar que T es lineal.
$i)\, T([a,b]+[c,d]) = T([a+c, b+d]) = [2(a+c)+3(b+d), 6(a+c)-2(b+d)]$
$= [2a+2c+3b+3d, 6a+6c-2b-2d]$
$T[a,b]+T[c,d] = [2a+3b, 6a-2b]+[2c+3d, 6c-2d] =$
$[2a+2c+3b+3d, 6a+6c-2b-2d]$
$ii)\, T(\alpha[a,b]) = T[\alpha a, \alpha b] = [2\alpha a+3\alpha b, 6\alpha a-2\alpha b]$
$\alpha T[a,b] = \alpha[2a+3b, 6a-2b] = [2\alpha a+3\alpha b, 6\alpha a-2\alpha b]$
De $i)$ y $ii)$ se muestra que T es lineal.
Calculemos la matriz asociada a T usando la base canónica $B = \{[1,0],[0,1]\}$
De acuerdo a lo conversado en clase, se tiene que $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$
Calculemos los valores propios de $[T]_B$, que serán los valores propios del operador T
$\begin{vmatrix} 2-r & 3 \\ 6 & -2-r \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-r)(-2-r)-18 = 0 \Rightarrow -4-2r+2r+r^2-18 =$
$0 \Rightarrow r^2-22 = 0 \Rightarrow r^2 = 22 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{22} \\ r_2 = -\sqrt{22} \end{cases}$ ❑

(15 puntos)