

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Lu 19/10/26**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) V El plano que pasa por los puntos $(1, 0, 3)$, $(2, 1, 0)$ y $(1, 0, -2)$ interseca a la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 2t + 2$

Justificación:

Obtengamos la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (1, 0, 3)$, $B = (2, 1, 0)$ y $C = (1, 0, -2)$

Calculemos dos vectores que estén en el plano.

$$\mathbf{a} = B - A = (2, 1, 0) - (1, 0, 3) = [1, 1, -3]$$

$$\mathbf{b} = C - A = (1, 0, -2) - (1, 0, 3) = [0, 0, -5]$$

Calculemos el vector normal $\mathbf{n}$ del plano.

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = [-5, 5, 0]$$

Si consideramos el punto $(1, 0, 3)$ que pertenece al plano, la ecuación es

$$-5(x - 1) + 5(y - 0) = 0 \Rightarrow -5x + 5 + 5y = 0 \Rightarrow -5x + 5y = -5 \Rightarrow -x + y = -1$$

Reemplacemos $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 2t + 2$ en la ecuación del plano recién calculado para saber si existe intersección.

$$-x + y = -1 \Rightarrow -1 - t + 2 - t = -1 \Rightarrow -2t = -2 \Rightarrow t = 1$$

El hecho que exista un valor real para t significa que el plano interseca a la recta. $\square$

b) F El triángulo de vértices $(2, 1, -1)$, $(2, 1, 1)$ y $(0, -1, 1)$ es isósceles.

Justificación:

Sean $A = (2, 1, -1)$, $B = (2, 1, 1)$ y $C = (0, -1, 1)$

Calculemos las distancias entre estos vértices para saber si el triángulo es isósceles.

$$d(A, B) = \sqrt{(2-2)^2 + (1-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$d(A, C) = \sqrt{(2-0)^2 + (1-(-1))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(2-0)^2 + (1-(-1))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Como los lados tienen distintas longitudes, se concluye que el triángulo no es isósceles. $\square$

c) V El conjunto $R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

Justificación:

Si despejamos x en la ecuación $x - 2y = 0$, se tiene que $x = 2y$. Luego, podemos reescribir el conjunto R como $R = \{[2y, y], y \in \mathbb{R}\}$

i) $R \neq \emptyset$, pues $[0, 0] \in R$ dado que $0 - 2(0) = 0$

ii) $\mathbf{v}_1 = [2a, a] \in R$ y $\mathbf{v}_2 = [2b, b] \in R \Rightarrow$

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = [2a, a] + [2b, b] = [2a + 2b, a + b] = [2(a + b), (a + b)] \in R$$

iii) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = [2c, c] \in R \Rightarrow \alpha \mathbf{v} = \alpha[2c, c] = [2c\alpha, c\alpha] \in R$

De i), ii) y iii) podemos concluir que R es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ $\square$

d) V Las rectas $-2 - x = \frac{y+3}{-2} = z$ y $2x - 1 = \frac{3+y}{2} = 3z$ son alabeadas

Justificación:

Recordemos que dos rectas son alabeadas cuando no se intersecan ni son paralelas.

Calculemos los vectores directores para ver si son paralelas.

Para la primera recta:

$$-2 - x = \frac{y+3}{-2} = z = t \Rightarrow$$

$$-2 - x = t \Rightarrow x = -2 - t$$

$$\frac{y+3}{-2} = t \Rightarrow y = -2t - 3$$

$$z = t$$

$$\text{Luego } \mathbf{r}_1 = [-1, -2, 1]$$

Para la segunda recta:

$$2x - 1 = \frac{3+y}{2} = 3z = c \Rightarrow$$

$$2x - 1 = c \Rightarrow x = \frac{1}{2}(c + 1) \Rightarrow x = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3+y}{2} = c \Rightarrow y = 2c - 3$$

$$3z = c \Rightarrow z = \frac{1}{3}c$$

$$\text{Luego } \mathbf{r}_2 = \left[\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}\right]$$

Observamos que $\mathbf{r}_1 \neq \alpha \mathbf{r}_2$ para algún escalar α fijo. Esto muestra que las rectas no son paralelas.

Veamos si las rectas se intersecan. Para ello igualamos las x , las y y las z para ambas rectas.

$$x = x \Rightarrow -2 - t = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$y = y \Rightarrow -2t - 3 = 2c - 3 \quad (2)$$

$$z = z \Rightarrow t = \frac{1}{3}c \Rightarrow c = 3t \quad (3)$$

Reemplazando (2) en (3) :

$$-2t - 3 = 2c - 3 \Rightarrow -2t - 3 = 2(3t) - 3 \Rightarrow -2t = 6t \Rightarrow 8t = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow c = 0$$

Ahora reemplazamos estos valores en (1) :

$$-2 - (0) = -2 \neq \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}$$

Esto muestra que no existe punto de intersección entre las rectas.

De todo lo anterior, tenemos que las rectas son alabeadas. $\square$

(40 puntos)

2) La proyección del vector $\mathbf{a}$ sobre el $\mathbf{b}$ está dada por $\text{proy}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$

Calcule la proyección del vector normal al plano $-2x + 3y = z - 1$, sobre el vector director de la recta $\frac{4-x}{2} = 1 - 4y = 3z - 1$

(08 puntos)

Solución:

Determinemos el vector normal del plano $-2x + 3y = z - 1$

$$-2x + 3y = z - 1 \Rightarrow -2x + 3y - z = -1 \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{a} = [-2, 3, -1]$$

Obtengamos el vector director de la recta $\frac{4-x}{2} = 1 - 4y = 3z - 1$

$$\frac{4-x}{2} = 1 - 4y = 3z - 1 = t \Rightarrow$$

$$\frac{4-x}{2} = t \Rightarrow 4 - x = 2t \Rightarrow x = 4 - 2t$$

$$1 - 4y = t \Rightarrow 4y = 1 - t \Rightarrow y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t$$

$$3z - 1 = t \Rightarrow 3z = t + 1 \Rightarrow z = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$$

Luego el vector director es $\mathbf{r} = \mathbf{b} = \left[-2, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$

$$\text{proy}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b} = \frac{\langle [-2, 3, -1], [-2, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}] \rangle}{\left\| \left[-2, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] \right\|^2} \left[-2, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] =$$

$$\frac{4 - \frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{4 + \frac{1}{16} + \frac{1}{9}} \left[-2, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] = \frac{\frac{35}{12}}{\frac{601}{144}} \left[-2, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] = \frac{420}{601} \left[-2, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] \square$$

3) Considere la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ en el espacio:

a) Analice y argumente si esta recta está contenida en el plano $x - y + 2z = 2$.

b) ¿Existe intersección entre esta recta y el plano dado en a)?

c) Calcule la distancia entre ellos.

(12 puntos)

Solución:

a) Primero despejemos x , y y z en términos del parámetro t en la recta.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1} = t \Rightarrow$$

$$\frac{x-2}{3} = t \Rightarrow x - 2 = 3t \Rightarrow x = 3t + 2$$

$$\frac{y-1}{1} = t \Rightarrow y - 1 = t \Rightarrow y = 1 + t$$

$$\frac{z+1}{-1} = t \Rightarrow z + 1 = -t \Rightarrow z = -t - 1$$

Reemplacemos lo anterior en la ecuación del plano para saber si existe intersección en un punto, infinitos puntos o en ningún punto.

$x - y + 2z = 2 \Rightarrow 3t + 2 - 1 - t - 2t - 2 = 2 \Rightarrow -1 = 2$ lo que es una contradicción. Esto indica que no existe intersección entre el plano y la recta, por lo que no puede estar contenida. $\square$

b) De a) se mostró que no existe intersección. $\square$

c) Notemos que el plano y la recta son paralelas, pues $\mathbf{n} = [1, -1, 2]$ y $\mathbf{r} = [3, 1, -1]$, luego $\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} \rangle = \langle [1, -1, 2], [3, 1, -1] \rangle = 3 - 1 - 2 = 0$.

De lo anterior, podemos elegir cualquier punto de la recta y luego calcular la distancia del punto cualquiera de la recta al plano.

Para la recta, si $t = 0$, entonces $A = (2, 1, -1)$

Para el plano, si $y = z = 0$, entonces $P_0 = (2, 0, 0)$

$$\overrightarrow{AP_0} = P_0 - A = (2, 0, 0) - (2, 1, -1) = [0, -1, 1]$$

$$d(A, \pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{AP_0}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\langle [0, -1, 1], [1, -1, 2] \rangle|}{\|[1, -1, 2]\|} = \frac{1+2}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \approx 1.2247 \square$$