UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Lu 20/10/25

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) ___V___ El plano que pasa por los puntos $(1,-1,2)$, $(2,1,0)$ y $(2,1,-2)$ interseca a $2x=1+t,\ y=2-t,\ z=2t+2$

Justificación:

Obtengamos la ecuación del plano que pasa por los puntos $A=(1,-1,2)$, $B=(2,1,0)$ y $C=(2,1,-2)$

Calculemos dos vectores que estén en el plano

$\boldsymbol{a}=B-A=(2,1,0)-(1,-1,2)=[1,2,-2]$

$\boldsymbol{b}=C-A=(2,1,-2)-(1,-1,2)=[1,2,-4]$

Un vector normal al plano es $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 2 & -4\end{vmatrix}=[-8+4,\ -2+4,0]=[-4,2,0]$$

Luego la ecuación del plano considerando el punto $(2,1,0)$ es

$$-4(x-2)+2(y-1)+0(z-0)=0\Rightarrow -4x+8+2y-2=0\Rightarrow$$
$$-4x+2y=-6$$

Despejemos las variables x, y y z de las ecuaciones de la recta

$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$

$y=2-t$

$z=2t+2$

Reemplazando lo anterior en la ecuación del plano se tiene:

$$-4x+2y=-6\Rightarrow -2-2t+4-2t=-6\Rightarrow -4t=-8\Rightarrow t=2$$

El hecho que t tenga un valor real significa que existe intersección. $\square$

b) ___V___ Si $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ es l.i., entonces $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\}$ también lo es

Justificación:

Si $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ es l.i., entonces

$$\alpha_1\,\boldsymbol{a}+\alpha_2\,\boldsymbol{b}+\alpha_3\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\theta}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0 \qquad (*)$$

$\beta_1\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\beta_2\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\beta_3\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{\theta}\Rightarrow$
$\beta_1\,\boldsymbol{a}+\beta_1\,\boldsymbol{b}+\beta_2\,\boldsymbol{b}+\beta_2\,\boldsymbol{c}+\beta_3\,\boldsymbol{a}+\beta_3\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\theta}\Rightarrow$
$(\beta_1+\beta_3)\,\boldsymbol{a}+(\beta_1+\beta_2)\,\boldsymbol{b}+(\beta_2+\beta_3)\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\theta}\Rightarrow{}^{(*)}$

$\beta_1+\beta_3=0\Rightarrow\beta_1=-\beta_3$

$\beta_1+\beta_2=0\Rightarrow\beta_2-\beta_3=0$
$\beta_2+\beta_3=0\Rightarrow\beta_2+\beta_3=0$

$2\,\beta_2=0\Rightarrow\ \beta_2=0$
$\beta_3=\beta_2=0$
$\beta_1=-\beta_3=0$

Dado que todos los escalares de la combinación lineal son ceros, entonces el conjunto $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\}$ es l.i. ❑

c) ___V___ $[1,-1,3]\in\ <\{[1,0,-1],[2,1,0],[3,-2,4]\}>$
Justificación:

$$\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&-2&-1\\-1&0&4&3\end{bmatrix}\longrightarrow_{F_1+F_3}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&-2&-1\\0&2&7&4\end{bmatrix}\longrightarrow_{F_2(-2)+F_3}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\0&1&-2&-1\\0&0&11&6\end{bmatrix}$$

$r_A=3=r_{Ab}=n$
Esto muestra que el sistema posee única solución, es decir, el vector $[1,-1,3]$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores del conjunto $\{[1,0,-1],[2,1,0],[3,-2,4]\}$ ❑

d) ___F___ El sistema $x-3y+2z=1,\ 2y=z-x,\ 4x+2y-z=4$ no se puede resolver usando el método de la inversa.
Justificación:
El sistema es :
$x-3y+2z=1$
$x+2y-z=0$
$4x+2y-z=4$
Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes, pues si es distinto de cero se puede usar el método de la inversa.

$$\begin{vmatrix}1&-3&2\\1&2&-1\\4&2&-1\end{vmatrix}=-2+12+4-16+2-3=-3\neq0$$ ❑

(40 puntos)

2) Considere los puntos $P_1(1,1,1),\ P_2(-1,-3,1),\ P_3(4,1,-1)$ en $\mathbb{R}^3$

a) Calcule el área del triangulo cuyos vértices son P_1, P_2 y P_3.

b) Calcule la ecuación del plano que contiene al triángulo anterior.

c) Calcule la distancia entre la recta L y el plano calculado en la parte b), donde , $L: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(10 puntos)

__**Solución:**__

a) Recordemos que el área A es $A = \frac{1}{2} \| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \|$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos lados del triángulo.

Calculemos dos lados

$\boldsymbol{a} = P_2 - P_1 = (-1,-3,1) - (1,1,1) = [-2,-4,0]$

$\boldsymbol{b} = P_3 - P_1 = (4,1,-1) - (1,1,1) = [3,0,-2]$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = [8,-4,12]$$

$\| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \| = \sqrt{64+16+144} = \sqrt{224}$

$A = \frac{1}{2} \| \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \| = \frac{1}{2}\sqrt{224}$ ❑

b) Tenemos que $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [8,-4,12]$

Si consideramos el punto $P_1(1,1,1)$ se tiene:

$$8(x-1) - 4(y-1) + 12(z-1) = 0 \Rightarrow 8x - 8 - 4y + 4 + 12z - 12 = 0 \Rightarrow$$
$$8x - 4y + 12z = 16 \Rightarrow 2x - y + 3z = 4$$ ❑

c) Recordemos que la distancia d de un punto a un plano es $d = \frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AP_0}} \cdot \boldsymbol{n}\right|}{\| \boldsymbol{n} \|}$

De la recta $2x - y + 3z = 4$, haciendo $y = z = 0$, se obtiene $x = 2$

Notemos que $\boldsymbol{n} = [2,-1,3]$, $A = (3,0,4)$ y $P_0 = (2,0,0)$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AP_0}} = (2,0,0) - (3,0,4) = [-1,0,-4]$

$\overrightarrow{\boldsymbol{AP_0}} \cdot \boldsymbol{n} = [-1,0,-4] \cdot [2,-1,3] = -2 - 12 = -14$

$\| \boldsymbol{n} \| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$d = \frac{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AP_0}} \cdot \boldsymbol{n}\right|}{\| \boldsymbol{n} \|} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$ ❑

3) Calcule los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

(10 puntos)

<u>**Solución:**</u>

Calculemos los valores propios

$$\begin{vmatrix} 3-x & -1 & 0 \\ -3 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & -3-x \end{vmatrix} = (3-x)(1-x)(-3-x) - 3(-3-x) = 0 \Rightarrow$$

$$(-3-x)[(3-x)(1-x)-3] = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3-x=0 \\ (3-x)(1-x)-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ 3-4x+x^2-3=0 \end{cases}$$

$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x_2 = 0,\ x_3 = 4$

Para $x_1 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 3-(-3) & -1 & 0 \\ -3 & 1-(-3) & 1 \\ 0 & 0 & -3-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow^{F_1(1/2)+F_2} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fijemos b : $\frac{7}{2}b + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{7}{2}b$

$6a - b = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{6}b$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}b \\ b \\ -\frac{7}{2}b \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $x_2 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow^{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow^{F_2(3)+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fijemos $d:\ 3d-f=0\Rightarrow f=3d$
$g=0$

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix} d\\ f\\ g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d\\ 3d\\ 0\end{pmatrix},\ d\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Para $x_3=4:$

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -1 & 0\\ -3 & 1-4 & 1\\ 0 & 0 & -3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ k\\ m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0\\ -3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h\\ k\\ m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0\\ -3 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow_{F_1(-3)+F_2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow_{F_2(7)+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Fijemos $h:\ -h-k=0\Rightarrow k=-h$
$m=0$

$$\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix} h\\ k\\ m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} h\\ -h\\ 0\end{pmatrix},\ h\in\mathbb{R}-\{0\}$$