UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL

INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Ju 24/10/24

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ ___F___ La distancia del punto $(2,\,-1,0)$ a
$$\begin{cases} -x+y=z-1 \\ 2x+y=z+2 \end{cases}$$
es mayor que la distancia del punto $(-1,1,\,-1)$ a $4x+y-2z=6$

Justificación:

Recordemos que la distancia de una punto a una recta es
$$d_1(A_1,L)=\frac{\left\| \overrightarrow{A_1P_0}\times \boldsymbol{r}\right\|}{\|\boldsymbol{r}\|}$$
Por otro lado, la distancia de un punto a un plano es
$$d_2(A_2,\pi)=\frac{\left|<\overrightarrow{A_2P_0},\boldsymbol{n}>\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}$$
Trabajemos primero con la distancia del punto a la recta

Obtengamos la recta de intersección de los planos $\begin{cases} -x+y-z=\,-1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$
$$\left(\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 2 & 1 & -1 & | & 2 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_1(2)+F_2} \left(\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{array}\right)$$
Tenemos que $r_A=r_{Ab}=2<n=3$, por lo que debemos fijar una incógnita

Fijemos $z=t$

$3y-3t=0 \Rightarrow y=t$

$-x+y-t=\,-1 \Rightarrow x=y-t+1 \Rightarrow x=t-t+1 \Rightarrow x=1$

La recta de intersección entre los planos dados es

$x=1$
$y=\ t$
$z=t$

De lo anterior, el vector director de la recta es $\boldsymbol{r}=[0,1,1]$

Otra forma de calcular el vector director, en este caso es
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=[0,\,-3,\,-3]$$
Usemos el vector $\boldsymbol{r}=[0,1,1]$ (no importa cuál usar, pues uno es múltiplo escalar del otro)

Calculemos un punto de la recta; para ello consideremos, por ejemplo, $t=0:$

$P_0 = (1, 0, 0)$

$\overrightarrow{\boldsymbol{A_1P_0}} = (2, -1, 0) - (1, 0, 0) = [1, -1, 0]$

$\overrightarrow{\boldsymbol{A_1P_0}} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [-1, -1, 1]$

$\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{A_1P_0}} \times \boldsymbol{r} \right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad ; \quad \|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

$d_1(A_1, L) = \dfrac{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{A_1P_0}} \times \boldsymbol{r} \right\|}{\|\boldsymbol{r}\|} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \approx 1.22$

Trabajemos ahora con la distancia del punto al plano

Calculemos un punto del plano; para ello despejemos y : $\; y = 6 + 2z - 4x$

Si $x = 0 = z$, entonces $y = 6.$ Luego $P_0 = (0, 6, 0)$

$\overrightarrow{\boldsymbol{A_2P_0}} = (-1, 1, -1) - (0, 6, 0) = [-1, -5, -1] \;;\; \boldsymbol{n} = [4, 1, -2]$

$< \overrightarrow{\boldsymbol{A_2P_0}}, \boldsymbol{n} > \; = \; < [-1, -5, -1], [4, 1, -2] > \; = -4 - 5 + 2 = -7$

$\|\boldsymbol{n}\| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

$d_2(A_2, \pi) = \dfrac{\left| < \overrightarrow{\boldsymbol{A_2P_0}}, \boldsymbol{n} > \right|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \dfrac{|-7|}{\sqrt{21}} = \dfrac{7}{\sqrt{21}} \approx 1.53$

Observamos que $d_1(A_1, L) \approx 1.22 < d_2(A_2, \pi) \approx 1.53$ $\square$

$b)$ ___V___ El plano que pasa por los puntos $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 0)$ interseca a $\frac{3y-1}{2} = z + 2 = \frac{2x+1}{-3}$

Justificación:

Obtengamos la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 0)$

Sean $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ y $C = (1, -1, 0)$

$\boldsymbol{a} = B - A = [-1, 1, 0]$

$\boldsymbol{b} = C - A = [0, -1 -1]$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = [-1, -1, 1]$

Consideremos que $A = (1, 0, 1)$ es el punto elegido del plano

$-(x-1) - (y-0) + (z-1) = 0 \Rightarrow -x + 1 - y + z - 1 = 0 \Rightarrow -x - y + z = 0$

Obtengamos ahora las ecuaciones paramétricas de la recta dada

$\frac{3y-1}{2} = z + 2 = \frac{2x+1}{-3} = t \Rightarrow$

$3y - 1 = 2t \Rightarrow 3y = 2t + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$

$z + 2 = t \Rightarrow z = t - 2$

$2x + 1 = -3t \Rightarrow 2x = -3t - 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$

Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación del plano, se tiene

$-x - y + z = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} + t - 2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}t - \frac{2}{3}t + t = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{11}{6}t = \frac{11}{6} \Rightarrow t = 1$

El hecho que t tome un valor real significa que existe intersección entre el plano y la recta. $\square$

$c)$ ___V___ $S=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2/3x-2y=0\}\leq\mathbb{R}^2$
Justificación:
Notemos que
$S=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2/3x-2y=0\}=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2/x=\frac{2}{3}y\}=\{\left[\frac{2}{3}y,y\right],y\in\mathbb{R}\}$
$i)\ S\neq\emptyset$, pues $[0,0]\in S$
$ii)\ \left[\frac{2}{3}a,a\right]\in S$ y $\left[\frac{2}{3}b,b\right]\in S\Rightarrow\left[\frac{2}{3}a,a\right]+\left[\frac{2}{3}b,b\right]=\left[\frac{2}{3}(a+b),(a+b)\right]\in S$
$iii)\ \alpha\in\mathbb{R}$ y $\left[\frac{2}{3}a,a\right]\in S\Rightarrow\alpha\left[\frac{2}{3}a,a\right]=\left[\frac{2}{3}(\alpha a),(\alpha a)\right]\in S$
Esto muestra que $S=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2/3x-2y=0\}\leq\mathbb{R}^2$ $\square$

$d)$ ___F___ $<[1,-2,4],[x-1,y+2,z]>\ =0$ es perpendicular a
$R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=1-a,y=2+a,z=4-2a,$ con $a\in\mathbb{R}\}$
Justificación:
$<[1,-2,4],[x-1,y+2,z]>\ =0\Leftrightarrow(x-1)-2(y+2)+4z=0$
Lo obtenido es un plano.
Observamos que R es una recta con parámetro a.
Ahora una recta es perpendicular a un plano cuando el vector normal del plano es paralelo al vector director de la recta, es decir, uno múltiplo escalar del otro.
$\boldsymbol{n}=[1,-2,4]$; $\boldsymbol{r}=[-1,1-2]$
Supongamos que $\alpha[1,-2,4]=[-1,1,-2]$
$\alpha[1,-2,4]=[-1,1,-2]\Rightarrow\alpha=-1;\ -2\alpha=1;\ 4\alpha=-2\Rightarrow$
$\alpha=-1;\alpha=-\frac{1}{2};\ \alpha=-\frac{1}{2}$
Esto muestra que no existe un único escalar α de modo que uno de los vectores sea múltiplo escalar del otro, es decir, el plano y la recta no son perpendiculares. $\square$

(40 puntos)

2) Sean $P_1=(1,1,-2)$, $P_2(2,0,2)$ y $P_3=(2,0,4)$
Calcular :
$a)$ El área del triángulo cuyos vértices son $P_1,\ P_2$ y P_3
$b)$ Los ángulos interiores del triángulo
$c)$ Un vector perpendicular al triángulo

(15 puntos)

Solución:
$b)$ Para el vértice P_1 se tiene
$\boldsymbol{a}=P_2-P_1=(2,0,2)-(1,1,-2)=[1,-1,4]$
$\boldsymbol{b}=P_3-P_1=(2,0,4)-(1,1,-2)=[1,-1,6]$

$cos(\alpha) = \frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{<[1,-1,4],[1,-1,6]>}{\|[1,-1,4]\|\|[1,-1,6]\|} = \frac{1+1+24}{\sqrt{1+1+16}\sqrt{1+1+36}} = \frac{26}{\sqrt{18}\sqrt{38}} \Rightarrow$

$\alpha = Arccos\left(\frac{26}{\sqrt{18}\sqrt{38}}\right) \approx 6.21°$

Para el vértice P_2 se tiene

$\boldsymbol{c} = P_1 - P_2 = (1,1,-2) - (2,0,2) = [-1,1,-4]$

$\boldsymbol{d} = P_3 - P_2 = (2,0,4) - (2,0,2) = [0,0,2]$

$cos(\beta) = \frac{<\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}>}{\|\boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{d}\|} = \frac{<[-1,1,-4],[0,0,2]>}{\|[-1,1,-4]\|\|[0,0,2]\|} = \frac{-8}{\sqrt{1+1+16}\sqrt{4}} = \frac{-8}{2\sqrt{18}} = -\frac{4}{\sqrt{18}} \Rightarrow$

$\beta = Arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{18}}\right) \approx 160.53°$

Dado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman $180°$, entonces $\gamma = 180 - 160.53 - 6.21 = 13.26°$ ❑

$a)$ Para calcular el área $A = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$ necesito dos vectores que representen dos lados del triángulo. De la parte $b)$ se tiene que $\boldsymbol{a} = [1,-1,4]$ y $\boldsymbol{b} = [1,-1,6]$ son dos lados del triángulo.

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = [-2,-2,0]$$

$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

El área es $A = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \frac{\sqrt{8}}{2} \approx 1.41$ ❑

$c)$ Un vector perpendicular al triángulo puede ser $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = [-2,-2,0]$, pues los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ están en el triángulo y el producto cruz es perpendicular a los vectores que lo forman. ❑

3) Calcule la proyección del vector normal al plano $2x + 2y = 2z + 1$, sobre el vector director de la recta $\frac{1-3y}{2} = 2 - x = z$

(05 puntos)

Solución:

El vector normal al plano es $\boldsymbol{n} = [2,2,-2]$

Determinemos el vector director $\boldsymbol{r}$ de la recta

$\frac{1-3y}{2} = 2 - x = z = t \Rightarrow$

$1 - 3y = 2t \Rightarrow 3y = 1 - 2t \Rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t$

$2 - x = t \Rightarrow x = 2 - t$

$z = t$

De lo anterior, observamos que $\boldsymbol{r} = [-1, -\frac{2}{3}, 1]$

Recordemos que la proyección de un vector $\boldsymbol{n}$ sobre un vector $\boldsymbol{r}$ es

$proy_{\boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{n} = \frac{<\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}>}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\boldsymbol{r} = \frac{<[2,2,-2],[-1,-\frac{2}{3},1]>}{\left\|[-1,-\frac{2}{3},1]\right\|^2}[-1,-\frac{2}{3},1] = \frac{-2-\frac{4}{3}-2}{1+\frac{4}{9}+1}[-1,-\frac{2}{3},1] =$

$\frac{-\frac{16}{3}}{\frac{22}{9}}[-1,-\frac{2}{3},1] = -\frac{24}{11}[-1,-\frac{2}{3},1] = [\frac{24}{11}, \frac{48}{33}, -\frac{24}{11}]$ ❑