UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL

NOMBRE :____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 45 MINUTOS **FECHA : Ju 26/10/23**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ __V____ Los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son perpendiculares.

Justificación:
Calculemos los valores propios de A

$$|A - aI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-a)(1-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios

Para $a_1 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 0 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2q = 0 \Rightarrow q = 0$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}, \ p \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $a_2 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 3-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2v = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}, \ w \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Calculemos el producto interno entre los vectores propios obtenidos

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} = p \cdot 0 + 0 \cdot w = 0$$

Esto muestra que los vectores propios son perpendiculares. ❑

$b)$ ___V___ El plano que pasa por los puntos $(0,1,1)$, $(-2,1,0)$ y $(2,2,-2)$ interseca a la recta $x = 1-t,\ 3y = 1-t,\ z = 2t+2$

Justificación:
Sean $A = (0,1,1),\ B = (-2,1,0)$ y $C = (2,2,-2)$
Obtengamos dos vectores que estén en el plano

$\boldsymbol{a} = B - A = [-2, 0, -1]$
$\boldsymbol{b} = C - A = [2, 1, -3]$
El producto cruz entre los vectores anteriores será perpendicular al plano

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = [1, -8, -2]$$

Si consideramos como P_0 el punto A, se tiene
$(x-0) - 8(y-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow x - 8y + 8 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow$
$x - 8y - 2z = -10$
Obtengamos la intersección entre el plano recién calculado y la recta dada
Reemplacemos $x = 1 - t,\ y = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t,\ z = 2t + 2$ en la ecuación del plano
$x - 8y - 2z = -10 \Rightarrow 1 - t - \frac{8}{3} + \frac{8}{3}t - 4t - 4 = -10 \Rightarrow -\frac{7}{3}t = -\frac{13}{3} \Rightarrow t = \frac{13}{7}$
Dado que t posee un valor real significa que existe intersección $\square$

$c)$ ___V___ La distancia desde el punto $(1, 3, -2)$ a la recta $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$ es mayor que la longitud del vector $[1, -1, 2] \times [1, 0, 0]$

Justificación:

Obtengamos en primer lugar la ecuación de la recta $\begin{matrix} x + 2y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{matrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(-1)+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -4 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que $r_A = r_{Ab} = 2 < N = 3.$ Debemos fijar $N - r_A = 3 - 2 = 1$ incógnita.
Fijemos $z = t:$
$-4y + 3t = 1 \Rightarrow 4y = 3t - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}$
$x + 2y - t = 1 \Rightarrow x = 1 + t - 2y \Rightarrow x = 1 + t - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$
La recta tiene ecuación:
$x = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}$
$y = \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}$
$z = t$
Un punto de la recta puede ser: $P_0 = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, 0)$
Además el vector director de la recta es $\boldsymbol{r} = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1]$
Como $A = (1, 3, -2)$, se tiene que $\overrightarrow{P_0A} = A - P_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{13}{4}, -2]$
Calculemos $\boldsymbol{r} \times \overrightarrow{P_0A}$

$$\boldsymbol{r} \times \overrightarrow{P_0A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{4} & -2 \end{vmatrix} = [-\frac{19}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}]$$

La distancia d desde A hasta la recta es

$d=\frac{\left\| \boldsymbol{r}\times\overrightarrow{P_0A}\right\|}{\| \boldsymbol{r}\|}=\frac{\sqrt{(-\frac{19}{4})^2+(-\frac{3}{2})^2+(-\frac{5}{4})^2}}{\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{4})^2+1^2}}=\frac{\sqrt{\frac{211}{8}}}{\sqrt{\frac{29}{16}}}=\sqrt{\frac{422}{29}}\approx 3.8$

Calculemos ahora $[1,\,-1,2]\times[1,0,0]$

$[1,\,-1,2]\times[1,0,0]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=[0,2,1]$

La longitud l de este vector es

$l=\|\,[1,\,-1,2]\times[1,0,0]\,\|=\|\,[0,2,1]\|\,=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\approx 2.2$

Observamos que efectivamente $d>l$. $\square$

$d)$ ___V___ $T=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/\sum_{i=1}^{2}a_{i\;3-i}=0\}\leq\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Justificación:

$T=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/\sum_{i=1}^{2}a_{i\;3-i}=0\}=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/a_{12}+a_{21}=0\}$

$=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/a_{12}=\,-a_{21}\}=\left\{\begin{bmatrix} a_{11} & -a_{21} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix};a_{11},a_{21},a_{22}\in\mathbb{R}\right\}$

$i)\,T\neq\emptyset$, pues $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\in T$ porque $a_{12}+a_{21}=0+0=0$

$ii)\,B=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c\end{bmatrix}\in T$ y $C=\begin{bmatrix} d & -f \\ f & g\end{bmatrix}\in T\Rightarrow$

$B+C=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & -f \\ f & g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+d & -b-f \\ b+f & c+g\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix} a+d & -(b+f) \\ b+f & c+g\end{bmatrix}\in T$

$iii)\,\alpha\in\mathbb{R}$ y $B=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c\end{bmatrix}\in T\Rightarrow\alpha B=\alpha\begin{bmatrix} a & -b \\ b & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha a & -\alpha b \\ \alpha b & \alpha c\end{bmatrix}\in T$

Lo anterior muestra que $T\leq\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\square$

$e)$ ___V___ El triángulo de vértices $(1,1,0)$, $(-2,1,0)$ y $(0,\,-1,1)$ es isósceles.

Justificación:

Sean $A=(1,1,0)$, $B=(-2,1,0)$ y $C=(0,\,-1,1)$

Tenemos que

$d(A,B)=\sqrt{(-2-1)^2+(1-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{(-3)^2+0^2+0^2}=\sqrt{9}=3$

$d(A,C)=\sqrt{(0-1)^2+(-1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}=$
$\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

$d(B.C)=\sqrt{(0-(-2))^2+(-1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=$
$\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

Dado que dos lados del triángulo tiene igual medida, se concluye que es isósceles. $\square$

$f)$ __V____ La distancia entre los planos $x+y-z=1$ y $x-y+5z=4$ es menor que 5.

Justificación:

Observamos que los planos no son paralelos, pues $\boldsymbol{n}_1=[1,1,-1]$ no es paralelo a $\boldsymbol{n}_2=[1,-1,5]$, y dado que se intersecan la distancia entre ellos es cero, que es menor que 5 $\square$

(48 puntos)

2) $a)$ Muestre que la distancia d del punto $A=(a_1,a_2,a_3)$ al plano $Ax+By+Cz=D$ es $d=\frac{|A\,a_1+B\,a_2+Ca_3-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$b)$ Utilice la fórmula dada en $a)$ para calcular la distancia del punto $(1,1,3)$ al plano $x-4y+z=-3$

(12 puntos)

Solución:

$a)$ Obtengamos un punto P_0 del plano $Ax+By+Cz=D$

Si $x=y=0$, entonces $z=\frac{D}{C}$, es decir $P_0=\left(0,0,\frac{D}{C}\right)$

Luego $\overrightarrow{P_0A}=A-P_0=\left[a_1,a_2,a_3-\frac{D}{C}\right]$

Observamos que $\boldsymbol{n}=[A,B,C]$

La distancia d está dada por

$$d=\frac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_0A}\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{\left|[A,B,C]\cdot[a_1,a_2,a_3-\frac{D}{C}]\right|}{\|[A,B,C]\|}=\frac{\left|Aa_1+Ba_2+Ca_3-C\frac{D}{C}\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$
$$\frac{|A\,a_1+B\,a_2+Ca_3-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ \square$$

$b)$ $A=(a_1,a_2,a_3)=(1,1,3)$, $D=-3$

$\boldsymbol{n}=[A,B,C]=[1,-4,1]$

$$d=\frac{|A\,a_1+B\,a_2+Ca_3-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1(1)+(-4)(1)+1(3)-(-3)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{|1-4+3+3|}{\sqrt{1+16+1}}=\frac{3}{\sqrt{18}}\ \square$$