UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS

Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL

INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1HORA 40 MINUTOS FECHA : Vi 28/10/22

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.
$a)$ __F____ El triángulo de vértices $(1,0,-1), (-2,2,0)$ y $(0,-2,1)$ es isósceles.
Justificación:
Sean $A=(1,0,-1)$, $B=(-2,2,0)$ y $C=(0,-2,1)$
$d(A,B)=\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$
$d(A,C)=\sqrt{(-1)^2(-2)^2+2^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$
$d(B,C)=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21}$
Observamos que todos los lados tienen distintas longitudes, por lo que el triángulo no es isósceles. $\square$

$b)$ ___V___ Las rectas $\frac{x+1}{3}=\frac{2-3z}{4}=4y-1$ y $x=1+t,\, 2y=t,\, 3z=t+1$ son alabeadas.
Justificación:
Dos rectas son alabeadas cuando no se intersecan ni son paralelas.
Se determina el vector director $\boldsymbol{r}_1$ de la primera recta mencionada.
$x+1=3s \Rightarrow x=3s-1$
$2-3z=4s \Rightarrow 3z=2-4s \Rightarrow z=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}s \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_1=[3,\frac{1}{4},-\frac{4}{3}]$
$4y-1=s \Rightarrow 4y=1+s \Rightarrow y=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}s$
Se obtiene el vector director $\boldsymbol{r}_2$ de la segunda recta.
$x=1+t$
$2y=t \Rightarrow y=\frac{1}{2}t \qquad \Rightarrow \boldsymbol{r}_2=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$
$3z=t+1 \Rightarrow z=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$
Se observa que los vectores directores no son paralelos, pues $[3,\frac{1}{4},-\frac{4}{3}] \neq \alpha[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$; es decir las rectas no son paralelas.
Se determina ahora si se intersecan.
$3s-1=1+t \qquad (1)$
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}s=\frac{1}{2}t \Rightarrow 1+s=2t \qquad (2)$
$\frac{2}{3}-\frac{4}{3}s=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3} \Rightarrow 2-4s=t+1 \qquad (3)$
De (1) y (3)
$3s-1=2-4s \Rightarrow 7s=3 \Rightarrow s=\frac{3}{7}$

De (1)
$t=3s-2 \Rightarrow t=\frac{9}{7}-2 \Rightarrow t=-\frac{5}{7}$
Se reemplazan los valores de s y t en la ecuación (2)
$1+s=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7} \neq 2t=-\frac{10}{7}$
Esto muestra que las rectas no se intersecan. $\square$

$c)$ ___V___ La distancia entre las rectas $-2-x=\frac{y+3}{-2}=z$ y $2x-1=\frac{3+y}{2}=3z$ es mayor que 2.
Justificación:
Se obtienen los vectores directores de cada recta
Sea $\boldsymbol{r}_1$ el vector director de la recta $L_1:\ -2-x=\frac{y+3}{-2}=z$, y sea $\boldsymbol{r}_2$ el vector director de la recta $L_2:\ 2x-1=\frac{3+y}{2}=3z$
$-2-x=\frac{y+3}{-2}=z \Rightarrow \frac{x+2}{-1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{1} \Rightarrow \boldsymbol{r}_1=[-1,-2,1]$
$2x-1=\frac{3+y}{2}=3z \Rightarrow 2(x-\frac{1}{2})=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \boldsymbol{r}_2=\left[\frac{1}{2},2,\frac{1}{3}\right]$
Se observa que los vectores directores no son paralelos, por lo que las rectas no lo son.
Se determina si existe punto de intersección.
Para L_1, se tiene que
$-2-x=t \Rightarrow x=-2-t$
$y+3=-2t \Rightarrow y=-2t-3$
$z=t$
Para L_2 se tiene que
$2x-1=s \Rightarrow x=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}$
$3+y=2s \Rightarrow y=2s-3$
$3z=s \Rightarrow z=\frac{1}{3}s$
Luego
$-2-t=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}$ $\qquad (1)$
$-2t-3=2s-3$ $\qquad (2)$
$t=\frac{1}{3}s$ $\qquad (3)$
De (2) y (3)
$2s=-2t$
$s=3t$
$3t=-2t \Rightarrow 5t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow s=0$
Reemplazando estos valores en (1)
$-2 \neq \frac{1}{2}$
Es decir, las rectas no se intersecan, y por lo tanto son alabeadas.
Se obtiene un punto P_1 de la primera recta mencionada, y un punto P_2 de la segunda recta.
De las ecuaciones simétricas, se tiene que

$P_1 = (-2, -3, 0)$ y $P_2 = (\frac{1}{2}, -3, 0)$

Luego, $\boldsymbol{P_1P_2} = \left[\frac{5}{2}, 0, 0\right]$

$$\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = [0, \frac{5}{6}, -5]$$

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{P_1P_2}) = [-1, -2, 1] \cdot [0, \frac{5}{6}, -5] = -\frac{5}{3} - 5 = -\frac{20}{3}$$

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = [-\frac{2}{3} - 2, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, -2 + 1] = [-\frac{8}{3}, \frac{5}{6}, -1]$$

$$\| \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \| = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{25}{36} + 1} = \sqrt{\frac{317}{36}}$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{P_1P_2})|}{\| \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \|} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{\sqrt{317}}{6}} = \frac{40}{\sqrt{317}} \approx 2.25 > 2 \ \square$$

$d)$ ___F___ Las matrices $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ poseen los mismos valores propios.

Justificación:

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$|A - a\,I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a & -1 \\ -1 & 1-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a)(1-a) - 1 = 1 - 2a + a^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $a = 2$

$$|B - bI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2-b & 2 \\ 2 & -2-b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-b)(-2-b) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$4 + 4b + b^2 - 4 = 0 \Rightarrow 4b + b^2 = 0 \Rightarrow b(4+b) = 0 \Rightarrow b = 0$ ó $b = -4$

Observamos que no poseen los mismos valores propios. $\square$

$e)$ __V____ $T = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \sum_{i=1}^{2} a_{ii} = 0\} \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Justificación:

Se nota que $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$i)$ $T \neq \emptyset$, pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$, dado que la suma de los elementos de la diagonal principal es cero.

$ii)$ $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in T$ y $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} d & f \\ f & -d \end{pmatrix} \in T \Rightarrow$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & f \\ f & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+f \\ c+f & -a-d \end{pmatrix} \in T$, pues la suma de los elementos de la diagonal principal es cero.

$iii)\ \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in T \Rightarrow \alpha\,\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & -\alpha a \end{pmatrix} \in T$, pues la suma de los elementos de la diagonal principal es cero.
Lo anterior muestra que $T \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ❑

(40 puntos)

2) Sean $P_1 = (1,2,1),\ P_2(2,1,2)$ y $P_3 = (2,0,1)$
Calcular :
$a)$ El área del triángulo cuyos vértices son $P_1,\ P_2$ y P_3
$b)$ Los ángulos interiores del triángulo
$c)$ Un vector perpendicular al triángulo
$d)$ Obtenga la ecuación del plano que pasa por los puntos dados.

(20 puntos)

<u>Solución:</u>

$a)\ \boldsymbol{a} = P_2 - P_1 = [1,-1,1]$
$\boldsymbol{b} = P_3 - P_1 = [1,-2,0]$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [2,1,-1]$$

Si A representa el área del triángulo, entonces
$A = \frac{1}{2}\ \|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \frac{1}{2}\ \sqrt{4+1+1} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1.22$ ❑

$b)$ Sea α el ángulo en el vértice P_1
$\boldsymbol{a} = P_2 - P_1 = [1,-1,1]$
$\boldsymbol{b} = P_3 - P_1 = [1,-2,0]$

$$\alpha = Arccos\left(\frac{<[1,-1,1],[1,-2,0]>}{\|\,[1,-1,1]\,\|\ \|\,[1,-2,0]\,\|}\right) = Arccos\left(\frac{3}{\sqrt{3}\,\sqrt{5}}\right) \approx 39.23^\circ$$

Sea β el ángulo en el vértice P_2
$\boldsymbol{a} = P_1 - P_2 = [-1,1,-1]$
$\boldsymbol{b} = P_3 - P_2 = [0,-1,-1]$

$$\alpha = Arccos\left(\frac{<[-1,1,-1],[0,-1,-1]>}{\|\,[-1,1,-1]\,\|\ \|\,[0,-1,-1]\,\|}\right) = Arccos\left(\frac{0}{\sqrt{3}\,\sqrt{2}}\right) = 90^\circ$$

Ahora si γ es el ángulo en el vértice P_3, se tiene que $\gamma = 180 - 90 - 39.23 \approx 50.77$ ❑
$c)$ Un vector perpendicular al triángulo es $[2,1,-1]$, que se calculó en $a)$ ❑
$d)$ El mismo vector perpendicular de $c)$, es un vector normal al plano solicitado; y si se considera a $P_1 = (1,2,1)$ como punto del plano elegido, se tiene que la ecuación del plano es
$2(x-1)+(y-2)-(z-1) = 0 \Rightarrow 2x-2+y-2-z+1 = 0$
$\Rightarrow 2x+y-z = 3$ ❑