UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Lu 25/05/26

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.
a) ___V___ El plano que pasa por los puntos $(0,1,-1)$, $(1,1,0)$ y $(0,1,-2)$ interseca a la recta $2x=1-t,\ y=2-t,\ z=t+2$
Justificación:
Determinemos la ecuación del plano que pasa por los puntos $A=(0,1,-1)$, $B=(1,1,0)$ y $C=(0,1,-2)$
Para calcular el vector normal obtendremos dos vectores que estén en el plano y luego el producto cruz de aquellos es un vector perpendicular al plano.
$\boldsymbol{v}=B-A=(1,1,0)-(0,1,-1)=[1,0,1]$
$\boldsymbol{w}=C-A=(0,1,-2)-(0,1,-1)=[0,0,-1]$

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=[0,1,0]$$

Un punto del plano puede ser $A=(0,1,-1)$. Luego la ecuación del plano es
$y-1=0\Rightarrow y=1$
Ahora si reemplazamos $y=2-t$ en la ecuación del plano, se tiene
$1=2-t\Rightarrow t=2-1\Rightarrow t=1$
Esto significa que efectivamente existe intersección entre el plano y la recta dadas. ❑

b) ___F___ El ángulo formado por los planos $x+2y-z=-1$ y $-x+y-z=2$ es $43.2°$
Justificación:
El ángulo entre dos planos es el formado por sus vectores normales.
Para $\pi_1:\ x+2y-z=-1$ el vector normal es $\boldsymbol{n}_1=[1,2,-1]$
Para $\pi_2:\ -x+y-z=2$ el vector normal es $\boldsymbol{n}_2=[-1,1,-1]$
Luego, si α es el ángulo formado por los planos dados, entonces

$$\alpha=Arccos\left(\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|}\right)=Arccos\left(\frac{[1,2,-1]\cdot[-1,1,-1]}{\|[1,2,-1]\|\|[-1,1,-1]\|}\right)=$$
$$Arccos\left(\frac{-1+2+1}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+1}}\right)=Arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}}\right)\approx 61°52'28.18''\neq 43.2°$$ ❑

$c)$ ___V___ La distancia entre $\frac{x+1}{3}=\frac{2-3z}{4}=4y-1$ y $x=1+t,\, 2y=t,$ $3z=t+1$ es $\frac{2\sqrt{1090}}{109}$

Justificación:

Debemos verificar si las rectas son paralelas, se intersecan o son alabeadas.
Determinemos en primer lugar los vectores directores.

Para $L_1: \frac{x+1}{3}=\frac{2-3z}{4}=4y-1$

$\frac{x+1}{3}=\frac{2-3z}{4}=4y-1=p \Rightarrow$

$x+1=3p \Rightarrow x=3p-1$

$2-3z=4p \Rightarrow 3z=2-4p \Rightarrow z=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}p$

$4y-1=p \Rightarrow 4y=p+1 \Rightarrow y=\frac{1}{4}\,p+\frac{1}{4}$

Tenemos que $\boldsymbol{r}_1=[3,\frac{1}{4},-\frac{4}{3}]$

Para $L_2: x=1+t,\, 2y=t,\, 3z=t+1$

$x=1+t$

$y=\frac{1}{2}\,t$

$z=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}$

Tenemos que $\boldsymbol{r}_2=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$

Observamos que $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ no son paralelos, pues $[3,\frac{1}{4},-\frac{4}{3}]\neq\alpha[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$ para algún α real. Esto significa que las rectas no son paralelas.

Veamos si se intersecan.

$x=x \Rightarrow 3p-1=1+t \Rightarrow 3p-t=2 \qquad (1)$

$y=y \Rightarrow \frac{1}{4}\,p+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\,t \Rightarrow p+1=2t \Rightarrow p-2t=-1 \qquad (2)$

$z=z \Rightarrow \frac{2}{3}-\frac{4}{3}p=\frac{1}{3}t+\frac{1}{3} \Rightarrow 2-4p=t+1 \Rightarrow -4p-t=-1 \qquad (3)$

De $(2):\ p=2t-1.$ Reemplazando en $(1):$

$3(2t-1)-t=2 \Rightarrow 6t-3-t=2 \Rightarrow 5t=5 \Rightarrow t=1 \Rightarrow p=2-1=1$

Reemplazando estos valores en $(3):$

$-4p-t=-4-1=-5\neq -1$

Esto muestra que las rectas no se intersecan.

Lo anterior muestra que las rectas son alabeadas.

En este caso, la distancia d es $d(L_1,L_2)=\frac{\left|\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}})\right|}{\|\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2\|}$, donde P_1 y P_2 son puntos pertenecientes a las rectas L_1 y L_2, respectivamente.

Para P_1 consideremos $p=0.$ Luego $P_1=\left(-1,\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$

Para P_2 consideremos $t=0.$ Luego $P_2=\left(1,0,\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}=\left(1,0,\frac{1}{3}\right)-\left(-1,\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)=[2,-\frac{1}{4},-\frac{1}{3}]$

$$\boldsymbol{r}_2\times\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=[-\frac{1}{12},1,-\frac{5}{4}]$$

$\boldsymbol{r}_1\cdot(\boldsymbol{r}_2\times\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}})=[3,\frac{1}{4},-\frac{4}{3}]\cdot[-\frac{1}{12},1,-\frac{5}{4}]=-\frac{3}{12}+\frac{1}{4}+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = [\tfrac{3}{4}, -\tfrac{7}{3}, \tfrac{5}{4}]$$

$$\| \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{49}{9} + \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{545}{72}}$$

$$d(L_1, L_2) = \frac{\left| \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \overrightarrow{\boldsymbol{P_1 P_2}}) \right|}{\| \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 \|} = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{545}{72}}} = \frac{5}{3} \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{545}} = \frac{5}{3} \frac{\sqrt{2}\sqrt{36}\sqrt{545}}{\sqrt{545}\sqrt{545}} =$$

$$\frac{5}{3} 6 \frac{\sqrt{2}\sqrt{545}}{545} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{545}}{109} = \frac{2\sqrt{1090}}{109} \quad \square$$

$d)$ ___V___ La suma de los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ es igual a la norma del vector solución del sistema $x + y + z = \frac{20}{3}$, $x - y = -\frac{4}{3}$, $y - z = 0$

Justificación:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A - aI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a & -1 \\ -1 & 3-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a)(3-a) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3 - 4a + a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 + \sqrt{2} \\ a_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Luego, $a_1 + a_2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$

Calculemos la solución del sistema dado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{20}{3} \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_1(-1)+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{20}{3} \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_{23}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{20}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_2(2)+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{20}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -8 \end{array}\right)$$

$$-3z = -8 \Rightarrow z = \frac{8}{3}$$

$$y - z = 0 \Rightarrow y = z = \frac{8}{3}$$

$$x + y + z = \frac{20}{3} \Rightarrow x = \frac{20}{3} - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{64}{9} + \frac{64}{9}} = \sqrt{16} = 4 \quad \square$$

(40 puntos)

2) Usando sistemas de ecuaciones lineales, balancee la ecuación química siguiente: $Al_2\,S_3 + H_2O \longrightarrow Al\,(OH)_3 + H_2\,S$

(10 puntos)

Solución:

$x\,Al_2\,S_3 + y\,H_2O \longrightarrow z\,Al\,(OH)_3 + w\,H_2\,S$

$Al:\ 2x - z = 0$

$S: 3x - w = 0$

$H: 2y - 3z - 2w = 0$

$O: y - 3z = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & w & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \longrightarrow_{F_1(-3/2)+F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_{24}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_2(-2)+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_3(-1/2)+F_4}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que $r_A = 3 = r_{A\boldsymbol{b}} < n = 4.$ Debemos fijar una incógnita. Fijemos w

$3z - 2w = 0 \Rightarrow 3z = 2w \Rightarrow z = \frac{2}{3}w$

$y - 3z = 0 \Rightarrow y = 3z \Rightarrow y = 2w$

$2x - z = 0 \Rightarrow 2x = z \Rightarrow x = \frac{1}{2}z \Rightarrow x = \frac{1}{3}w$

Si hacemos $w = 3,$ entonces $z = 2,\ y = 6,\ x = 1$

La ecuación química balanceada es

$Al_2\,S_3 + 6\,H_2O \longrightarrow 2\,Al\,(OH)_3 + 3\,H_2\,S$ $\square$

3) Sean $P_1 = (1, -1, 2),\ P_2(2,1,2)$ y $P_3 = (1,0,2)$

Calcular :

$a)$ El área del triángulo cuyos vértices son $P_1,\ P_2$ y P_3

$b)$ Los ángulos interiores del triángulo

$c)$ Un vector perpendicular al triángulo

(10 puntos)

Solución:

$a)$ El área de un triángulo de aristas $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ es $A = \frac{1}{2}\,\|\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\|$

$\boldsymbol{v} = P_2 - P_1 = (2,1,2) - (1,-1,2) = [1,2,0]$
$\boldsymbol{w} = P_3 - P_1 = (1,0,2) - (1,-1,2) = [0,1,0]$
$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [0,0,1]$
$\| \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \| = \sqrt{0+0+1} = \sqrt{1} = 1$
$A = \frac{1}{2} \| \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \| = \frac{1}{2}$ $\square$

$b)$ Vértice común P_1 : $cos(\alpha) = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\| \boldsymbol{v} \| \| \boldsymbol{w} \|} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{[1,2,0] \cdot [0,1,0]}{\| [1,2,0] \| \| [0,1,0] \|} \Rightarrow$
$cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{1+4+0}\sqrt{0+1+0}} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = Arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 26.6^\circ$

Vértice común P_2 :
$\boldsymbol{a} = P_1 - P_2 = (1,-1,2) - (2,1,2) = [-1,-2,0]$
$\boldsymbol{b} = P_3 - P_2 = (1,0,2) - (2,1,2) = [-1,-1,0]$
$cos(\beta) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\| \boldsymbol{a} \| \| \boldsymbol{b} \|} \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{[-1,-2,0] \cdot [-1,-1,0]}{\| [-1,-2,0] \| \| [-1,-1,0] \|} \Rightarrow$
$cos(\beta) = \frac{3}{\sqrt{1+4+0}\sqrt{1+1+0}} \Rightarrow cos(\beta) = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = Arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) \approx 18.4^\circ$

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 26.6^\circ - 18.4^\circ = 135^\circ$ $\square$

$c)$ Un vector perpendicular al triángulo es $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = [0,0,1]$ $\square$