UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Ju 26/06/25

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) ___F___ El ángulo formado por los planos $x+y-z=1$ y $2x+2y-z=1$ es $15°$

Justificación:
El ángulo formado por dos planos es el ángulo formado por sus vectores normales.
El vector normal del plano $x+y-z=1$ es $\boldsymbol{n}_1=[1,1,-1]$ y el vector normal del plano $2x+2y-z=1$ es $n_2=[2,2,-1]$

$$cos(\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2))=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{\|\boldsymbol{n}_1\|\|\boldsymbol{n}_2\|}\Rightarrow cos(\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2))=\frac{[1,1,-1]\cdot[2,2,-1]}{\|[1,1,-1]\|\|[2,2,-1]\|}\Rightarrow$$

$$cos(\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2))=\frac{2+2+1}{\sqrt{3}\sqrt{9}}\Rightarrow cos(\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2))=\frac{5}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=Arccos\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)$$
$$\Rightarrow\angle(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)\approx 15.79°\neq 15° \quad \square$$

b) ___F___ El triángulo de vértices $(1,-1,2)$, $(2,1,-3)$ y $(4,2,1)$ es isósceles.

Justificación:
Sean $A=(1,-1,2)$, $B=(2,1,-3)$ y $C=(4,2,1)$
Calculemos las distancias entre vértices para conocer la longitud de los lados.

$$d(A,B)=\sqrt{(2-1)^2+(1-(-1))^2+(-3-2)^2}=\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}=$$

$$\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30}$$

$$d(A,C)=\sqrt{(4-1)^2+(2-(-1))^2+(1-2)^2}=\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}=$$

$$\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}$$

$$d(B,C)=\sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2+(1-(-3))^2}=\sqrt{2^2+1^2+4^2}=$$

$\sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

Observamos que el triángulo no es isósceles, pues no hay dos lados de igual longitud. $\square$

$c)$ ___V___ La distancia de $\frac{3x-1}{3} = \frac{2-2y}{6} = 4z+1$ al punto $(-1, 2, 0)$ es mayor que la distancia de $3x-2y = 4z+2y-2$ al punto $(-1, -1, 1)$

Justificación:

Calculemos, en primer lugar, la distancia de la recta al punto dado.

$\frac{3x-1}{3} = \frac{2-2y}{6} = 4z+1 \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$

El vector director es $\boldsymbol{r} = \left[1, -3, \frac{1}{4}\right]$

Un punto de la recta puede ser $P_0 = \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{4}\right)$

El punto A dado es $(-1, 2, 0)$

El vector $\overrightarrow{P_0A} = \left[-\frac{4}{3}, 1, \frac{1}{4}\right]$

Luego

$$\boldsymbol{r} \times \overrightarrow{P_0A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & \frac{1}{4} \\ -\frac{4}{3} & 1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \left[-1, -\frac{7}{12}, -3\right]$$

$$\left\|\boldsymbol{r} \times \overrightarrow{P_0A}\right\| = \sqrt{1 + \frac{49}{144} + 9} = \frac{\sqrt{1489}}{12}$$

$$\|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{1 + 9 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{161}}{4}$$

$$d(Recta, A) = \frac{\left\|\boldsymbol{r} \times \overrightarrow{P_0A}\right\|}{\|\boldsymbol{r}\|} = \frac{\frac{\sqrt{1489}}{12}}{\frac{\sqrt{161}}{4}} \approx 1.01$$

Calculemos ahora la distancia del plano al punto dado.

$3x - 2y = 4z + 2y - 2 \Rightarrow 3x - 4y - 4z = -2$

El vector normal es $\boldsymbol{n} = [3, -4, -4]$

Un punto del plano, considerando $x = 0$ y $y = 0$, es $P_0 = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$

El punto A dado es $(-1, -1, 1)$

El vector $\overrightarrow{P_0A} = \left[-1, -1, \frac{1}{2}\right]$

Luego

$\left| < \boldsymbol{n}, \overrightarrow{P_0A} > \right| = \left| < [3,\ -4,\ -4], \left[-1,\ -1,\ \frac{1}{2}\right] > \right| = |-3+4-2| = 1$

$\|\boldsymbol{n}\| = \|[3,\ -4,\ -4]\| = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$

$d(Plano, A) = \dfrac{\left|<\boldsymbol{n},\overrightarrow{P_0A}>\right|}{\|\boldsymbol{n}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{41}} \approx 0.16$

Finalmente $d(Recta, A) \approx 1.01 > d(Plano, A) \approx 0.16$ ❑

$d)$ __V____ Las rectas $x-1=y+2=z$ y $2x=t,\ y+1=t-1,\ z=4-t$ son alabeadas

Justificación:

Dos rectas son alabeadas cuando no son paralelas ni se intersecan.
Para ver si son paralelas o no debemos obtener los vectores directores.

$x-1=y+2=z=s \Rightarrow$

$x=s+1$
$y=s-2$
$z=s$

$\boldsymbol{r}_1 = [1,1,1]$

$2x=t,\ y+1=t-1,\ z=4-t \Rightarrow$

$x=\frac{1}{2}t$
$y=t-2$
$z=4-t$

$\boldsymbol{r}_2 = \left[\frac{1}{2}, 1,\ -1\right]$

Observamos que los vectores directores no son paralelos, pues comparando las segundas componentes el escalar sería 1, pero los vectores no son iguales.
Veamos si las rectas se intersecan.
Debemos igualar las coordenadas correspondientes, es decir,

$s+1=\frac{1}{2}t \qquad (1)$
$s-2=t-2 \qquad (2)$
$s=4-t \qquad (3)$

Reemplazando s de (3) en (2): $4-t-2=t-2 \Rightarrow 2t=4 \Rightarrow t=2$
Luego $s=4-t=4-2=2$

Reemplazando $s = 2$ y $t = 2$ en $(1):$ $s + 1 = 2 + 1 = 3 \neq \frac{1}{2}t = 1$
Esto muestra que las rectas no se intersecan.
Dado que las rectas no son paralelas ni se intersecan, podemos, por tanto, decir que las rectas son alabeadas. $\square$

(40 puntos)

2) Calcule el ángulo entre los vectores $[1,2,3]$ y $[3,2,1]$.
¿Son perpendiculares los vectores anteriores?. Ju $=$ stifique.

(10 puntos)

Solución:

$cos(\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)) = \frac{[1,2,3]\cdot[3,2,1]}{\|[1,2,3]\|\|[3,2,1]\|} \Rightarrow cos(\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)) = \frac{3+4+3}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{9+4+1}} \Rightarrow$
$cos(\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)) = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{14}} \Rightarrow cos(\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)) = \frac{10}{14} \Rightarrow cos(\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)) = \frac{5}{7} \Rightarrow$
$\angle(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = Arccos\left(\frac{5}{7}\right) \approx 44.4°$

Los vectores no son perpendiculares porque el producto punto no es cero o también porque el ángulo entre los vectores no es $90°$ $\square$

3) Obtenga, si existe, el punto de intersección entre $3x = t$, $y + 1 = 3 - t, z = 2t$ y $x - y + z = 1$

(10 puntos)

Solución:

De la recta se tiene que

$$x = \frac{1}{3}t\,;\; y = 2 - t\,;\; z = 2t \qquad (*)$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación del plano $x - y + z = 1$ se tiene:

$$x - y + z = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}t - 2 + t + 2t = 1 \Rightarrow \frac{10}{3}t = 3 \Rightarrow t = \frac{9}{10}$$

Reemplazando este valor de t en $(*)$ se tiene que

$$x = \frac{1}{3}t = \frac{1}{3}\frac{9}{10} = \frac{3}{10}$$

$$y = 2 - t = 2 - \frac{9}{10} = \frac{11}{10}$$

$$z = 2t = 2\,\frac{9}{10} = \frac{9}{5}$$

Finalmente, las coordenadas del punto de intersección son $(x, y, z) = \left(\frac{3}{10}, \frac{11}{10}, \frac{9}{5}\right)$ $\square$