UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Lu 03/06/24

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) ___F___ El triángulo de vértices $(2,3,1)$, $(-1,3,-2)$ y $(0,a,-1)$ es siempre escaleno, no importando el valor de $a \in \mathbb{R}-\{0\}$

Justificación:

Sean $A=(2,3,1)$, $B=(-1,3,-2)$ y $C=(0,a,-1)$

$d(A,B)=\sqrt{(2-(-1))^2+(3-3)^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{3^2+0^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$

$d(A,C)=\sqrt{(2-0)^2+(3-a)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{2^2+(3-a)^2+2^2}=\sqrt{4+(3-a)^2+4}$
$=\sqrt{8+(3-a)^2}$

$d(B,C)=\sqrt{(-1-0)^2+(3-a)^2+(-2-(-1))^2}=\sqrt{1^2+(3-a)^2+1^2}=\sqrt{2+(3-a)^2}$

Observamos que si $a=7$, entonces

$d(B,C)=\sqrt{2+4^2}=\sqrt{2+16}=\sqrt{18}=d(A,B)$

Además $d(A,C)=\sqrt{8+4^2}=\sqrt{8+16}=\sqrt{24}$

Esto muestra que existe $a=7\neq 0$ para el cual el triángulo es isósceles y no escaleno. $\square$

b) ___F___ La distancia del punto $(1,-2,1)$ al plano $2x-y+2z=4$ es mayor que $\|[1,-1,2]\|$

Justificación:

Tenemos que el punto $A=(1,-2,1)$ y $\boldsymbol{n}=[2,-1,2]$

Para calcular un punto del plano, despejemos la variable y de la ecuación del plano

$y=2x+2z-4$

Ahora si $x=z=0$, entonces $y=-4$, es decir, un punto del plano es $P_0=(0,-4,0)$

Luego $\overrightarrow{AP_0}=(0,-4,0)-(1,-2,1)=[-1,-2,-1]$

Calculemos en primer lugar la distancia d del punto al plano

$$d=\frac{\left|<\boldsymbol{n},\overrightarrow{\boldsymbol{AP_0}}>\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{|<[2,-1,2],[-1,-2,-1]>|}{\|[2,-1,2]\|}=\frac{|-2+2-2|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}\approx 0.67$$

Por otro lado, se tiene que $\|[1,-1,2]\|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}\approx 2.4$

Observamos que la distancia es menor que la norma del vector. $\square$

$c)$ ___F___ El ángulo formado por $x-y+z=1$ y $x-1=1-y=2z+1$ es $25°$

Justificación:

Observamos que el vector normal al plano es $\boldsymbol{n}=[1,\,-1,1]$

Consideremos la recta $x-1=1-y=2z+1$

$x-1=1-y=2z+1=t \Rightarrow$

$x-1=t \Rightarrow x=t+1$

$1-y=t \Rightarrow y=1-t$

$2z+1=t \Rightarrow z=\frac{t-1}{2}=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

El vector director de la recta es $\boldsymbol{r}=[1,\,-1,\,\frac{1}{2}]$

Calculemos el ángulo α entre el vector director y el vector normal

$cos(\alpha)=\frac{<\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}>}{\|\boldsymbol{n}\|\|\boldsymbol{r}\|} \Rightarrow cos(\alpha)=\frac{<[1,-1,1],[1,-1,\frac{1}{2}]>}{\|[1,-1,1]\|\,\|[1,-1,\frac{1}{2}]\|} \Rightarrow cos(\alpha)=\frac{1+1+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{9}{4}}} \Rightarrow$

$cos(\alpha)=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{3}\,\frac{3}{2}} \Rightarrow cos(\alpha)=\frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=Arccos\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)\approx 15,79°$

Finalmente el ángulo formado por el plano y la recta es aproximadamente de $90°-15,79°=74,21°\neq 25°$

(30 puntos)

2) Calcule la distancia entre los planos $x+5y-4z=1$ y $4x-y+5z=4$

(05 puntos)

<u>Solución:</u>

Observamos que los planos no son paralelos, pues $[1,5,\,-4]\neq c\,[4,\,-1,5]$ con $c\in\mathbb{R}$. Esto significa que la distancia entre ellos es cero, pues se intersecan $\square$

3) Obtenga, si existe, el punto de intersección entre $x=1+t,\ y=3-t, z=t$ y el plano $4x-2y+z=\,-1$

(10 puntos)

<u>Solución:</u>

Reemplazando x,y y z de la ecuación de la recta, en la ecuación del plano

$4x-2y+z=\,-1 \Rightarrow 4(1+t)-2(3-t)+t=\,-1 \Rightarrow 4+4t-6+2t+t=\,-1$

$\Rightarrow 7t-2=\,-1 \Rightarrow 7t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{7}$

Reemplzando este valor de t en la ecuación de la recta se tiene que

$x=1+t=1+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$

$y=3-t=3-\frac{1}{7}=\frac{20}{7}$

$z=t=\frac{1}{7}$

El punto de intersección tien coordenadas $\left(\frac{8}{7},\frac{20}{7},\frac{1}{7}\right)$ $\square$

4) Sean $A=(2,-1,2)$, $B=(1,0,2)$ y $C=(0,1,1)$
Calcular :
$a)$ El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C
$b)$ Los ángulos interiores del triángulo
$c)$ Un vector perpendicular al triángulo

(15 puntos)

Solución:

$a)$ Determinemos el área $A=\frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|$
Consideremos el punto A como común
$\boldsymbol{a}=B-A=(1,0,2)-(2,-1,2)=[-1,1,0]$
$\boldsymbol{b}=C-A=(0,1,1)-(2,-1,2)=[-2,2,-1]$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=[-1,-1,0]$$

$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|[-1,-1,0]\|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
El área es $A=\frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ❑

$b)$ Sean α, β y γ los ángulos interiores del triángulo en los vértices A, B y C respectivamente.
Observamos que para calcular α nos sirven los vectores del ítem anterior.

$$cos(\alpha)=\frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}\Rightarrow cos(\alpha)=\frac{<[-1,1,0],[-2,2,-1]>}{\|[-1,1,0]\|\,\|[-2,2,-1]\|}\Rightarrow cos(\alpha)=\frac{2+2+0}{\sqrt{2}\sqrt{9}}\Rightarrow$$

$$cos(\alpha)=\frac{4}{3\sqrt{2}}\Rightarrow \alpha=Arccos\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)\approx 19,47^{\circ}$$

Para calcular β consideramos el punto B como común
$\boldsymbol{c}=A-B=-[-1,1,0]=[1,-1,0]$
$d=C-B=(0,1,1)-(1,0,2)=[-1,1,-1]$

$$cos(\alpha)=\frac{<\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}>}{\|\boldsymbol{c}\|\,\|\boldsymbol{d}\|}\Rightarrow cos(\alpha)=\frac{<[1,-1,0],[-1,1,-1]>}{\|[1,-1,0]\|\,\|[-1,1,-1]\|}\Rightarrow cos(\alpha)=\frac{-1-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\Rightarrow$$

$$cos(\alpha)=-\frac{2}{\sqrt{6}}\Rightarrow \alpha=Arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\approx 144,74^{\circ}$$

Como los ángulos interiores de un triángulo suman 180°, se tiene que $\gamma\approx 180^{\circ}-144,74^{\circ}-19,47^{\circ}=15,79^{\circ}$ ❑

$c)$ De la parte $a)$ se tiene que un vector perpendicular al triángulo es $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[-1,-1,0]$, pues el producto cruz de dos aristas de un triángulo es siempre perpendicular al triángulo. ❑