UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Ju 25/05/23

(1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ ___V___ El conjunto $F=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/A^T=-A\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Justificación:

$F=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/A^T=-A\}=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})/A\,\text{es antisimétrica}\}=$
$\left\{\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$i)$ $F\neq\emptyset$, pues $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in F$ (La matriz nula de orden 2 es antisimétrica)

$ii)$ $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}\in F$ y $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}\in F\Rightarrow$

$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & a+b\\ -a-b & 0\end{bmatrix}=$
$\begin{bmatrix}0 & a+b\\ -(a+b) & 0\end{bmatrix}\in F$

$iii)$ $\alpha\in\mathbb{R}$ y $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}\in F\Rightarrow\alpha\,\boldsymbol{v}=\alpha\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \alpha a\\ -\alpha a & 0\end{bmatrix}\in F$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se concluye que F es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\square$

$b)$ __V___ La recta que es paralela a $\frac{2x+3}{3}=4-2y=\frac{-z+2}{2}$ y que pasa por el punto $(1,-1,0)$, forma un ángulo agudo con el plano $3x-2y-z=6$

Justificación:

Determinemos el vector director de la recta $\frac{2x+3}{3}=4-2y=\frac{-z+2}{2}$

$\frac{2x+3}{3}=t\Rightarrow 2x+3=3t\Rightarrow 2x=3t-3\Rightarrow x=\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}$

$4-2y=t\Rightarrow 2y=4-t\Rightarrow y=2-\frac{1}{2}t$

$\frac{-z+2}{2}=t\Rightarrow -z+2=2t\Rightarrow z=2-2t$

Luego el vector director de la recta dada es $\boldsymbol{r} = \left[\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ -2\right]$
El vector normal al plano es $\boldsymbol{n} = [3,\ -2,\ -1]$

El ángulo β entre la recta buscada y el plano es

$$\beta = 90° - Arccos\left(\frac{<\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}>}{\|\boldsymbol{r}\|\,\|\boldsymbol{n}\|}\right) = 90° - Arccos\left(\frac{<\left[\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-2\right],[3,-2,-1]>}{\left\|\left[\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-2\right]\right\|\,\|[3,-2,-1]\|}\right) =$$

$$90° - Arccos\left(\frac{\frac{9}{2}+1+2}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+4}\,\sqrt{9+4+1}}\right) = 90° - Arccos\left(\frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{26}{4}}\,\sqrt{14}}\right) \approx 90° - 38.17°$$

$$= 51.83° < 90° \quad \square$$

$c)$ ___V___ Los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ son ortogonales.

Justificación:
Calculemos en primer lugar los valores propios de A

$$|A - aI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-a & 1 \\ 1 & 1-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-a)(1-a) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$3 - 3a - a + a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} \Rightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 + \sqrt{2} \\ a_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios
Para $a_1 = 2 + \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 3-a_1 & 1 \\ 1 & 1-a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3-2-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1-2-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que si efectuamos operaciones elementales sobre la matriz ampliada, una fila será nula, por lo que elegimos, por ejemplo, la primera ecuación y fijamos p

$$(1-\sqrt{2})\,p + q = 0 \Rightarrow q = (\sqrt{2}-1)p$$

Los vectores propios para $a_1 = 2 + \sqrt{2}$ son $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ (\sqrt{2}-1)p \end{pmatrix}$, $p \neq 0$

Para $a_2 = 2 - \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 3-a_2 & 1 \\ 1 & 1-a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3-2+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1-2+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que si efectuamos operaciones elementales sobre la matriz ampliada, una fila será nula, por lo que elegimos, por ejemplo, la primera ecuación y fijamos x

$(1+\sqrt{2})\,x + y = 0 \Rightarrow y = (-1-\sqrt{2})x$

Los vectores propios para $a_2 = 2-\sqrt{2}$ son $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ (-1-\sqrt{2})x \end{pmatrix}$, $x \neq 0$

Calculemos ahora el producto interior entre los vectores propios obtenidos

$< \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > \; = \; < \begin{pmatrix} p \\ (\sqrt{2}-1)p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ (-1-\sqrt{2})x \end{pmatrix} > \; =$

$px + (\sqrt{2}-1)p\,(-1-\sqrt{2})x = px - \sqrt{2}\,px - 2\,px + px + \sqrt{2}\,px = 0$

Dado que el producto punto es cero, los vectores son ortogonales. ❑

d) ___F___ La distancia desde el punto $(1,0,-1)$ a la recta $\begin{cases} x+y-z = -1 \\ 3x-y+2z = 2 \end{cases}$ es mayor que $\sqrt{\pi}$

Justificación:

Tenemos que la distancia d desde un punto A a una recta L es

$$d(A,L) = \frac{\| \boldsymbol{r} \times \overline{P_0A} \|}{\| \boldsymbol{r} \|}$$

donde P_0 es un punto cualquiera de la recta.

Obtengamos la ecuación de la recta

$$\begin{cases} x+y-z = -1 \\ 3x-y+2z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1(-3)+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Tenemos que $r_A = 2 = r_{Ab} < N = 3$, es decir, debemos fijar una incógnita. Fijemos $z = t$

$-4y + 5\,t = 5 \Rightarrow -4y = 5 - 5\,t \Rightarrow 4y = 5\,t - 5 \Rightarrow y = \frac{5}{4}\,t - \frac{5}{4}$

$x + y - t = -1 \Rightarrow x = t - 1 - y \Rightarrow x = t - 1 - \frac{5}{4}\,t + \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,t$

Luego la recta dada tiene ecuaciones paramétricas

$x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,t$

$y = \frac{5}{4}\,t - \frac{5}{4}$

$z = t$

El vector director es $\boldsymbol{r} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, 1\right]$

Para $t = 1$, se tiene que un punto de la recta es $P_0 = (0,0,1)$

El punto $A = (1, 0, -1)$
$\overline{\boldsymbol{P_0A}} = [1, 0, -2]$

$$\boldsymbol{r} \times \overline{P_0A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4} \right]$$

$$\| \boldsymbol{r} \times \overline{P_0A} \| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{1}{4} + \frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{129}{16}} = \frac{\sqrt{129}}{4}$$

$$\| r \| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{25}{16} + 1} = \sqrt{\frac{42}{16}} = \frac{\sqrt{42}}{4}$$

$$d(A, L) = \frac{\| \boldsymbol{r} \times \overline{P_0A} \|}{\| \boldsymbol{r} \|} = \frac{\sqrt{129}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\frac{129}{42}} \approx 1.75 < \sqrt{\pi} \approx 1.77 \ \square$$

(40 puntos)

(2) Calcule la proyección del vector normal al plano $3x + 5y = z - 1$, sobre el vector director de la recta $\frac{3+x}{2} = 1 - y = z + 3$

(10 puntos)

Solución:
La proyección del vector $\boldsymbol{a}$ sobre el $\boldsymbol{b}$ es

$$proy_{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a} = \frac{<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}>}{\| \boldsymbol{b} \|^2}\, \boldsymbol{b}$$

El vector normal al plano es $\boldsymbol{n} = [3, 5, -1]$
Para obtener el vector director debemos reordenar un poco

$$\frac{3+x}{2} = 1 - y = z + 3 \Rightarrow \frac{x-(-3)}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-(-3)}{1}$$

Se observa que el vector director $\boldsymbol{r} = [2, -1, 1]$
Luego la proyección del vector normal al plano $3x + 5y = z - 1$, sobre el vector director de la recta $\frac{3+x}{2} = 1 - y = z + 3$ es

$$proy_{\boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{n} = \frac{<\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}>}{\| \boldsymbol{r} \|^2}\, \boldsymbol{r} = \frac{<[3,5,-1],[2,-1,1]>}{\| [2,-1,1] \|^2} [2, -1, 1] = \frac{6-5-1}{\| [2,-1,1] \|^2} [2, -1, 1] = \frac{0}{\| [2,-1,1] \|^2} [2, -1, 1] = [0, 0, 0] \ \square$$

(3) Muestre que la distancia d del punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ al plano $Ax + By + Cz = D$ es $d = \frac{| A\, a_1 + B\, a_2 + C a_3 - D |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Utilice esta fórmula para calcular la distancia del punto $(1, 0, 0)$ al plano $3x - 2y + 3z = -5$

(10 puntos)

Solución:

Tenemos que la distancia d de un punto $A=(a_1,a_2,a_3)$ al plano $Ax+By+Cz=D$ es $d=\frac{|<\boldsymbol{n},\overline{\boldsymbol{P_0A}}>|}{\|\boldsymbol{n}\|}$

Para obtener P_0 hacemos $x=0,\, y=0$ en la ecuación del plano $Ax+By+Cz=D$

$$A(0)+B(0)+Cz=D \Rightarrow z=\tfrac{D}{C}$$

Luego $P_0=\left(0,0,\tfrac{D}{C}\right)$

$$\overline{\boldsymbol{P_0A}}=\left[a_1,a_2,a_3-\tfrac{D}{C}\right]$$

$$n=[A,B,C]$$

$$<\boldsymbol{n},\overline{\boldsymbol{P_0A}}> \;=\; <[A,B,C],\left[a_1,a_2,a_3-\tfrac{D}{C}\right]> \;=A\,a_1+B\,a_2+C\,a_3-D$$

$$\|\boldsymbol{n}\|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

Finalmente, $d=\frac{|<\boldsymbol{n},\overline{\boldsymbol{P_0A}}>|}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{|A\,a_1+B\,a_2+C\,a_3-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ❏

Calculemos la distancia del punto $(1,0,0)$ al plano $3x-2y+3z=\,-5$

$$d=\frac{|3(1)+(-2)(0)+3\,(0)-(-5)|}{\sqrt{9+4+9}}=\frac{|3+5)|}{\sqrt{22}}=\frac{8}{\sqrt{22}}\approx 1.71 \text{ ❏}$$