

PAUTA CERTAMEN N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1HORA 30 MINUTOS **FECHA : Ju 09/06/22**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) **V** El punto de intersección, entre el plano que pasa por los puntos $(1, -1, 2)$, $(0, 1, 3)$ y $(2, -1, 3)$, y la recta $4x - 1 = 2t$, $6 - y = t$, $t - z = 1$, posee solo una componente negativa.

Justificación: Obtengamos la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (1, -1, 2)$, $B = (0, 1, 3)$ y $C = (2, -1, 3)$

$$\mathbf{a} = B - A = [-1, 2, 1]$$

$$\mathbf{b} = C - A = [1, 0, 1]$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [2, 2, -2]$$

Luego, la ecuación del plano es

$$2(x - 1) + 2(y + 1) - 2(z - 2) = 0 \Rightarrow 2x - 2 + 2y + 2 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2y - 2z = -4 \Rightarrow x + y - z = -2$$

Despejemos ahora x , y y z de las ecuaciones paramétricas de la recta

$$x = \frac{2t+1}{4} ; y = 6 - t ; z = t - 1 \quad (*)$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación del plano, tenemos

$$x + y - z = -2 \Rightarrow \frac{2t+1}{4} + 6 - t - t + 1 = -2 \Rightarrow$$

$$2t + 1 + 24 - 4t - 4t + 4 = -8 \Rightarrow -6t = -37 \Rightarrow t = \frac{37}{6}$$

Reemplazando el valor de t recién obtenido en $(*)$, se tiene

$$x = \frac{2\frac{37}{6}+1}{4} > 0 ; y = 6 - t = 6 - \frac{37}{6} = -\frac{1}{6} ; z = t - 1 = \frac{37}{6} - 1 = \frac{31}{6} > 0$$

Esto muestra que el punto de intersección posee solo una componente negativa. $\square$

b) **V** $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A^T - A = \Theta\} \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Justificación: $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A^T - A = \Theta\} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A^T = A\} =$

$$\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \text{ es simétrica}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

i) $M \neq \emptyset$, pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es simétrica y de orden 2

ii) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M$; $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} d & f \\ f & g \end{pmatrix} \in M \Rightarrow$

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+f \\ b+f & c+g \end{pmatrix} \in M$, pues es simétrica y de orden 2

iii) $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in M \Rightarrow \alpha \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c \end{pmatrix} \in M$, pues es simétrica y de orden 2

De i), ii) y iii), se concluye que $M \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\square$

c) **F** El ángulo formado por $2x - y + z = 1$ y $4x - y - z = 2$ es 25°

Justificación: Sea $\mathbf{n}_1 = [2, -1, 1]$ el vector normal del plano $2x - y + z = 1$, y

sea $\mathbf{n}_2 = [4, -1, -1]$ el vector normal del plano $4x - y - z = 2$

Luego, el ángulo α entre los planos será el ángulo entre los vectores normales, es decir

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{[2, -1, 1] \cdot [4, -1, -1]}{\|[2, -1, 1]\| \|[4, -1, -1]\|} \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha) = \frac{8+1-1}{\sqrt{4+1+1} \sqrt{16+1+1}} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{8}{\sqrt{6} \sqrt{18}} \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{6} \sqrt{18}}\right) \approx 39.7^\circ \neq 25^\circ \quad \square$$

(30 puntos)

2) Calcule la distancia entre $-2 - x = \frac{y+3}{-2} = z$ y $2x - 1 = \frac{3+y}{2} = 3z$

Obs.: $\frac{|\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)|}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|}$

Solución:

Obtenemos los vectores directores de cada recta

Sea $\mathbf{r}_1$ el vector director de la recta $L_1: -2 - x = \frac{y+3}{-2} = z$, y sea $\mathbf{r}_2$ el vector director de la recta $L_2: 2x - 1 = \frac{3+y}{2} = 3z$

$$-2 - x = \frac{y+3}{-2} = z \Rightarrow \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \mathbf{r}_1 = [-1, -2, 1]$$

$$2x - 1 = \frac{3+y}{2} = 3z \Rightarrow 2(x - \frac{1}{2}) = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \mathbf{r}_2 = \left[\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3} \right]$$

Obtengamos un punto P_1 de la primera recta mencionada, y un punto P_2 de la segunda recta.

De las ecuaciones simétricas, se tiene que

$$P_1 = (-2, -3, 0) \text{ y } P_2 = \left(\frac{1}{2}, -3, 0\right)$$

$$\text{Luego, } \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \left[\frac{5}{2}, 0, 0 \right]$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = [0, \frac{5}{6}, -5]$$

$$\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2) = [-1, -2, 1] \cdot [0, \frac{5}{6}, -5] = -\frac{5}{3} - 5 = -\frac{20}{3}$$

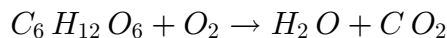
$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = [-\frac{2}{3} - 2, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, -2 + 1] = [-\frac{8}{3}, \frac{5}{6}, -1]$$

$$\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\| = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{25}{36} + 1} = \sqrt{\frac{317}{36}}$$

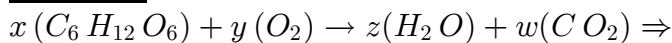
$$d(L_1, L_2) = \frac{|\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)|}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{\sqrt{317}}{6}} = \frac{40}{\sqrt{317}} \approx 2.25 \quad \square$$

(15 puntos)

3) Usando matrices, balancee la ecuación química



Solución:



$$C : 6x - w = 0$$

$$H : 12x - 2z = 0$$

$$O : 6x + 2y - z - 2w = 0$$

Escribamos el sistema anterior en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_{13} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\rightarrow F_1(-2) + F_2; F_1(-1) + F_3 \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_{32} \\
\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_2(-2) + F_3 \begin{pmatrix} \overset{x}{6} & \overset{y}{2} & \overset{z}{-1} & \overset{w}{-2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$r_A = 3 = r_{Ab} < N = 4 \Rightarrow$ existen infinitas soluciones

Fijemos w

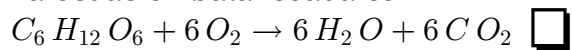
$$-2z + 2w = 0 \Rightarrow z = w$$

$$-2y + z + w = 0 \Rightarrow 2y = z + w \Rightarrow 2y = 2w \Rightarrow y = w$$

$$6x + 2y - z - 2w = 0 \Rightarrow 6x = z + 2w - 2y \Rightarrow 6x = w + 2w - 2w \Rightarrow 6x = w \Rightarrow x = \frac{w}{6}$$

Debemos elegir un valor de $w \in \mathbb{N}$ de modo que las otras variables sean enteras positivas. Si $w = 6$, entonces $x = 1$, $y = 6$ y $z = 6$

La ecuación balanceada es



(15 puntos)