UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA PRUEBA N° 2 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA – INGENIERÍA EN ALIMENTOS

NOMBRE :____CARRERA :________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS FECHA : Mi 10/05/17

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas.**

$a)$__F__ $dim(S) > dim(T)$, donde $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \text{ es antisimétrica}\}$ y $T = \{ax^2 + ax + a,\ a \in \mathbb{R}\}$

Justificación:

Verifiquemos en primer lugar si S y T son subespacios vectoriales.

Tenemos que : $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A \text{ es antisimétrica}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$

$i)$ $S \neq \emptyset$, pues $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es antisimétrica

$ii)$ $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \in S,\ a \in \mathbb{R}$ y $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \in S,\ b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{bmatrix} \in S;\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

$iii)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \in S,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{bmatrix} \in S,\ a \in \mathbb{R}$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se tiene que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Por otro lado, tenemos que $T = \{ax^2 + ax + a,\ a \in \mathbb{R}\}$

$i)$ $T \neq \emptyset$, pues $0x^2 + 0x + 0 \in T$ $(a = 0 \in \mathbb{R})$

$ii)$ $ax^2 + ax + a \in T$, $a \in \mathbb{R}$ y $bx^2 + bx + b \in T$, $b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow (ax^2 + ax + a) + (bx^2 + bx + b) = (a+b)x^2 + (a+b)x + (a+b) \in T\,;\ a, b \in \mathbb{R}$$

$iii)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ y $ax^2 + ax + a \in T$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha(ax^2 + ax + a) = \alpha a x^2 + \alpha a x + \alpha a \in T$, $a \in \mathbb{R}$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se tiene que T es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

Obtengamos bases para S y T

$S=\left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}$

$B_S=\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ es base de S porque genera al espacio y además es $l.i.$, pues es un conjunto con un solo vector distinto del nulo.

$T=\{ax^2+ax+a,\ a\in\mathbb{R}\}=\{a(x^2+x+1),\ a\in\mathbb{R}\}$

$B_T=\{x^2+x+1\}$ es base de T porque genera a T y además es $l.i.$, pues es un conjunto con un solo vector distinto del nulo.

Contando el número de vectores de cada base, se tiene que $dim(S)=1$ y $dim(T)=1$, y lo que se dice es falso porque $dim(S)=dim(T)$ ❑

$b)$ __F___ Si $\boldsymbol{a}=[1,3,5]$ y $\boldsymbol{b}$ es paralelo a $\boldsymbol{a}$, entonces $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

Justificación:

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son paralelos, entonces el conjunto $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\}$ es $l.d.$ y por lo tanto no puede ser base, porque los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ están relacionados, es decir, uno puede obtenerse del otro.
Otra forma de justificar es decir que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son paralelos, entonces $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=[0,0,0]$ pues una fila del determinante asociado es múltiplo escalar de otra, y un conjunto que contiene al vector nulo es $l.d.$ y por tanto no puede ser base. ❑

$c)$ ___V___ $<\{[a,\,-a],[2,3]\}>\ =\mathbb{R}^2$, con $a\neq 0$, constante

Justificación:

$<\{[a,\,-a],[2,3]\}>\ =\{\alpha[a,\,-a]+\beta[2,3];\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$
Analicemos si cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores del conjunto $\{[a,\,-a],[2,3]\}$

$[x,y]=\alpha[a,\,-a]+\beta[2,3]\Rightarrow$

$x=a\alpha+2\beta$
$y=\ -a\alpha+3\beta$

Sumando las ecuaciones anteriores:
$x+y=5\beta\Rightarrow\beta=\frac{x+y}{5}$

Reemplazando β en $x = a\alpha + 2\beta$ se tiene

$$x = a\alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha = \frac{x-2\beta}{a} = \frac{x-2\frac{x+y}{5}}{a} = \frac{x-\frac{2x}{5}-\frac{2y}{5}}{a} = \frac{\frac{3x}{5}-\frac{2y}{5}}{a} = \frac{3x-2y}{5a},\ a \neq 0$$

Observamos que ni α ni β tienen restricciones asociadas sobre x y y, por lo que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores del conjunto $\{[a,\ -a],[2,3]\}$, es decir, $<\{[a,\ -a],[2,3]\}> \ = \mathbb{R}^2$ ❑

$d)$ ___F__ Todo conjunto $l.i.$ de V es base de V, con V un espacio vectorial real

Justificación:

Sea $V = \mathbb{R}^2$ y sea $B = \{[1,1]\}$. Notamos que B es $l.i.$ porque es un conjunto con solo un vector distinto del nulo, pero no es base de $\mathbb{R}^2$, pues las base de $\mathbb{R}^2$ deben contener exactamente dos vectores ❑

(40 puntos).

(2) Obtenga:

$a)\ \|\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}\|$, con $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$b)\ <\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}>$, donde $\boldsymbol{a} = 1-x^2$ y $\boldsymbol{b} = x^2-1$

$c)$ dos vectores perpendiculares en $\mathbb{R}^3$

$d)$ un conjunto $l.d.$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, que no contenga al vector nulo

(20 puntos).

Solución:

$a)\ \|\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right\|$

$= \left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 13 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{49+4+4+16+169}$

$= \sqrt{242} = 11\sqrt{2}$ ❑

$b)\ <\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}> \ = \ <1-x^2+x^2-1, 1-x^2-(x^2-1)>$

$= \ <0, 2-2x^2> \ = 0$ ❑

$c)\ [1,\ -1,0]$ y $[2,2,0]$ ❑

$d)\ \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ ❑