

PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Lu 28/09/26**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Si $u = [1 \ -1 \ 3]$ y $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, entonces $u \cdot v$ es una matriz de orden 3.

Justificación:

Notamos que u es una matriz de orden 1×3 y v es de orden 3×1 , por lo que $u \cdot v$ es de orden 1×1 y no de orden 3 $\square$

b) F La suma de dos matrices ortogonales es siempre ortogonal

Justificación:

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal, pues

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

La matriz $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal, pues

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ahora $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es ortogonal, pues no existe su inversa. $\square$

c) F $\det(X) = 7$, si $AXB - C = XB$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\text{y } C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Justificación:

$$AXB - C = XB \Rightarrow AXB - XB = C \Rightarrow (A - I)XB = C \Rightarrow |(A - I)XB| = |C|$$

$$\Rightarrow |(A - I)||X||B| = |C| \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| |X| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| |X| \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow 2|X|(-1) = 18 \Rightarrow$$

$$|X| = -\frac{18}{2} = -9 \neq 7 \quad \square$$

d) _____ La ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ x & 3 & x \\ -1 & x & 2 \end{vmatrix} = 7$ no posee soluciones reales si $x \neq 0$

Justificación:

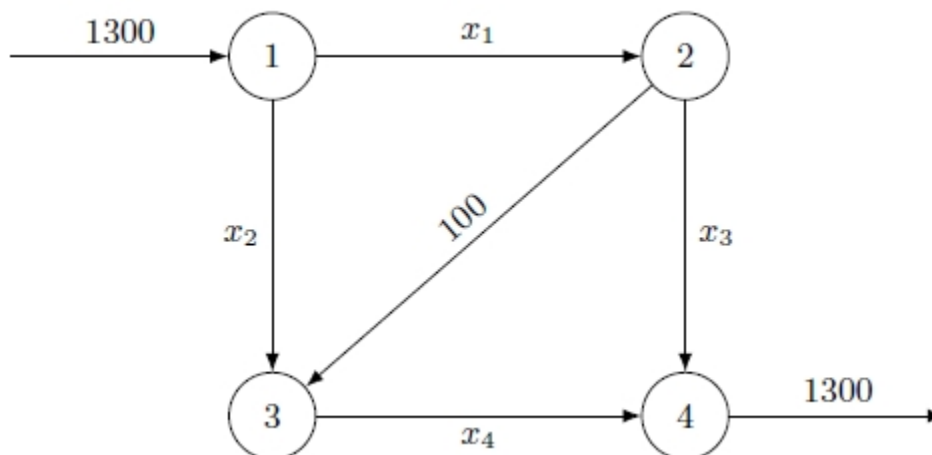
$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ x & 3 & x \\ -1 & x & 2 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow 6 - x^2 - x^2 - 3 - x^2 - 2x^2 = 7 \Rightarrow -5x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{5}}i \in \mathbb{C}$$

Esto muestra que la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ x & 3 & x \\ -1 & x & 2 \end{vmatrix} = 7$ no posee soluciones reales en ningún caso, en particular si $x \neq 0$. $\square$

(40 puntos)

2) El agua fluye a través de una red de tuberías, en miles de metros cúbicos por hora, como se muestra en la siguiente figura



Calcule el flujo de agua donde es desconocido cuando $x_3 = 200$.

(10 puntos)

Solución:

Recordemos que lo que entra en un nodo es igual a lo que sale de ese nodo.

Nodo 1 : $1300 = x_1 + x_2$

Nodo 2 : $x_1 = 100 + x_3$

Nodo 3 : $100 + x_2 = x_4$

Nodo 4 : $x_3 + x_4 = 1300$

Si $x_3 = 200$, entonces $x_1 = 100 + x_3 = 100 + 200 = 300$

$1300 = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = 1300 - x_1 = 1300 - 300 = 1000$

$100 + x_2 = x_4 \Rightarrow x_4 = 100 + 1000 = 1100$

Veamos si se cumple $x_3 + x_4 = 1300$

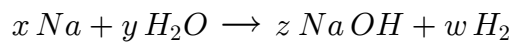
$x_3 + x_4 = 200 + 1100 = 1300$

Finalmente, $x_1 = 300$, $x_2 = 1000$ y $x_4 = 1100$ $\square$

3) Resuelva el sistema asociado a : $Na + H_2O \rightarrow NaOH + H_2$

(10 puntos)

Solución:



$Na : x = z$

$H : 2y = z + 2w$

$O : y = z$

Tenemos que $x = z$, $y = z$ y

$$2y = z + 2w \Rightarrow 2w = 2y - z \Rightarrow 2w = 2z - z \Rightarrow w = \frac{z}{2}$$

Si hacemos $z = 2$, tenemos que $x = 2$, $y = 2$ y $w = 1$

la ecuación balanceada es: $2 Na + 2 H_2O \rightarrow 2 NaOH + 1 H_2$ $\square$