

PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Lu 01/09/25**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\text{traza}((A^T \cdot A)^{-1}) = 7$

Justificación:

$$B = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculemos $|B|$ para saber si B posee inversa.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 0 - 8 - 0 - 3 = 1 \neq 0$$

Esto muestra que B^{-1} existe.

Calculemos B^{-1} usando operaciones elementales.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_{21}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{F_1(2)+F_2; F_1(-2)+F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1(-1); F_2(1/3)} \\ & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(4)+F_3} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 4/3 & 2/3 & 1 \end{array} \right] \rightarrow F_3(3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow F_3(2/3)+F_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(2)+F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

Luego, $B^{-1} = (A^T \cdot A)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y su traza es

$\text{Traza}(B) = 6 + 2 + 3 = 11 \neq 7$ $\square$

b) V Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$

Justificación:

Sabemos que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible, entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) \Rightarrow Adj(A) = |A| A^{-1} \Rightarrow |Adj(A)| = ||A| A^{-1}| \Rightarrow$$

$$|Adj(A)| = |A|^n |A^{-1}| \Rightarrow |Adj(A)| = |A|^n \frac{1}{|A|} \Rightarrow |Adj(A)| = |A|^{n-1} \square$$

c) V $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 16$

Justificación:

Calculemos la determinante usando la definición. Usaremos la fila $i = 3$

$$|A| = \sum_{j=1}^4 a_{3j} c_{3j} = a_{31} c_{31} + a_{32} c_{32} + a_{33} c_{33} + a_{34} c_{34} = -c_{31} - c_{32} + c_{33} - c_{34}$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 4 - 2 - 3 + 2 - 8 = -21$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(12 - 4 - 1 - 3 - 4 - 4) = 4$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 2 + 1 - 2 + 4 + 2 = 15$$

$$c_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 - 3 + 2 - 4 - 6 - 1) = 16$$

$$|A| = -c_{31} - c_{32} + c_{33} - c_{34} = 21 - 4 + 15 - 16 = 16 \quad \square$$

d) V La suma de dos matrices simétricas de orden 3 es siempre simétrica.

Justificación:

Sabemos que : $(A + B)^T = A^T + B^T$

Como A y B son simétricas, $A^T = A$ y $B^T = B$. Luego

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

Esto muestra que la suma de matrices, del mismo orden, simétricas es simétrica $\square$

(40 puntos)

2) Dadas las ecuaciones

$$2x - y + z = 1$$

$$x + y + z = 0$$

$$3x - 3z = 6$$

- Escriba el sistema en forma matricial
- Calcule el determinante de la matriz de coeficientes
- Resuelva el sistema usando el método de *Cramer*

(15 puntos)

Solución:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \square$$

$$b) |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 3 + 0 - 3 - 0 - 3 = -15 \quad \square$$

$$c) x_1 \equiv x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-3 - 6 + 0 - 6 - 0 - 0}{-15} = 1$$

$$x_2 \equiv y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{0 + 3 + 6 - 0 - 12 + 3}{-15} = 0$$

$$x_3 \equiv z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{12+0+0-3-0+6}{-15} = -1$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \square$$

3) Si $R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces calcule, si existe, $R \cdot R^T$

(05 puntos)

Solución:

$$R \cdot R^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$