

PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Ju 12/09/24**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\text{traza}((A^T \cdot A)^{-1}) = \frac{1}{4}$

Justificación:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{traza}((A^T \cdot A)^{-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \neq \frac{1}{4} \quad \square$$

b) V Sea $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ definida por $b_i = 1$, para $i = 1, 2, 3$
Si $A = I_3 - \frac{1}{3} B \cdot B^T$, entonces A es idempotente

Justificación:

Tenemos que $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{3} B \cdot B^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1 \quad 1] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A = I_3 - \frac{1}{3} B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Recordemos que una matriz es idempotente cuando $A^2 = A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = A$$

Esto muestra que la matriz A es idempotente. $\square$

c) F $\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = -6$

Justificación:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz dada

Si $i = 4$, entonces $\det(A) = \sum_{j=1}^4 a_{4j} c_{4j} = a_{41}c_{41} + a_{42}c_{42} + a_{43}c_{43} + a_{44}c_{44} =$

$$0 + 0 - c_{43} + 2c_{44} = 2c_{44} - c_{43}$$

Calculemos los cofactores

$$c_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(0 - 2 + 0 - 0 - 2 - 1) = 5$$

$$c_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 - 2 - 0 + 3 + 1 = 5$$

$$\det(A) = 2c_{44} - c_{43} = 2(5) - 5 = 10 - 5 = 5 \neq -6 \quad \square$$

d) F La suma de dos matrices ortogonales de orden 3, distintas de la idéntica, es siempre ortogonal.

Justificación:

Tenemos que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3$ es ortogonal (Reemplazamos $\alpha = \pi$

en la matriz $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Ahora $A + A = 2A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es ortogonal, pues

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq I_3$$

Esto muestra que, no siempre, la suma de dos matrices ortogonales es ortogonal. $\square$

(40 puntos)

2) Resuelva, si es posible, el sistema

$$4x - 2y + z = 1$$

$$x = y + z$$

$$z = 1 - x + 2y$$

(10 puntos)

Solución:

$$4x - 2y + z = 1$$

$$x = y + z \Rightarrow x - y - z = 0$$

$$z = 1 - x + 2y \Rightarrow x - 2y + z = 1$$

Tenemos que: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculemos la determinante de la matriz de coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 2 + 1 - 8 + 2 = -9$$

Usemos el método de Cramer para resolver el sistema

$$x_1 \equiv x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-1+2+0+1-2-0}{-9} = \frac{0}{-9} = 0$$

$$x_2 \equiv y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{0-1+1-0+4-1}{-9} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

$$x_3 \equiv z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-4+0-2+1-0+2}{-9} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$$

Finalmente, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \square$

3) Resuelva, si es posible, el sistema

$$x - y = z - 3 + y$$

$$3x = 2y - z + 1$$

(10 puntos)

Solución:

$$x - y = z - 3 + y \Rightarrow x - 2y - z = -3$$

$$3x = 2y - z + 1 \Rightarrow 3x - 2y + z = 1$$

Escribamos la matriz ampliada y obtengamos los rangos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1(-3)+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 10 \end{array} \right]$$

$$\text{Luego, } r_A = 2 = r_{Ab} < n = 3$$

Debemos fijar $n - r_A = 3 - 2 = 1$ incógnita

Fijemos $z = c$

$$4y + 4c = 10 \Rightarrow 4y = 10 - 4c \Rightarrow y = \frac{10-4c}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{2} - c$$

$$x - 2y - c = -3 \Rightarrow x = -3 + 2y + c \Rightarrow x = -3 + 5 - 2c + c \Rightarrow x = 2 - c$$

Finalmente, las soluciones del sistema son

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - c \\ \frac{5}{2} - c \\ c \end{bmatrix}, \text{ con } c \in \mathbb{R} \text{ constante. } \square$$