

PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Ju 07/09/23**

(1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $(-A^3)^T = A^T - A$

Justificación:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-A^3 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(-A^3)^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^T - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que $(-A^3)^T \neq A^T - A$ $\square$

b) F La ecuación $\begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ x & 5 & x \\ -1 & x & 0 \end{vmatrix} = 7$ no posee soluciones reales si $x \neq 0$

Justificación:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ x & 5 & x \\ -1 & x & 0 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow -x^2 + x^2 + 5 + x^2 = 7 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Esto muestra que la ecuación dada sí posee soluciones reales para $x \neq 0$ $\square$

c) F La matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $a_{ij} = \begin{cases} (-2)^{i+j} & , i \neq j \\ 0 & , i = j \end{cases}$ es

tal que A^{-1} tiene solo números positivos en la primera fila.

Justificación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-2)^3 & (-2)^4 \\ (-2)^3 & 0 & (-2)^5 \\ (-2)^4 & (-2)^5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 16 \\ -8 & 0 & -32 \\ 16 & -32 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4096 + 4096 = 8192$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -32 \\ -32 & 0 \end{vmatrix} = -1024$$

$$a_{11}^{-1} = -\frac{1024}{8192} < 0$$

Esto muestra que no todos los elementos de la primera fila de la inversa son positivos. $\square$

d) V Sea a el mayor valor propio de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + a = -1$$

Justificación:

Calculemos el mayor valor propio de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A - bI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-b & 1 \\ 1 & 1-b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-b)(1-b) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 2b + b^2 - 1 = 0 \Rightarrow b^2 - 2b = 0 \Rightarrow b(b-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 2 \end{cases}$$

Observamos que $a = b_2 = 2$

Calculemos ahora el determinante D dado, usando la definición y la primera fila.

$$D = \sum_{j=1}^4 a_{1j} c_{1j} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + a_{14}c_{14} = 0 + 0 + c_{13} + c_{14} = c_{13} + c_{14}$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 6 + 3 + 18 + 2 + 4 = 25$$

$$c_{14} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2 + 15 + 1 + 6 + 5 - 1) = -28$$

Tenemos que $D = 25 - 28 = -3$

$$\text{Finalmente, } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} + a = -3 + 2 = -1 \quad \square$$

(40 puntos)

(2) Calcule la inversa de $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ usando operaciones elementales.

(10 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_{12}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_{23}} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3(1)+F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2(-1)+F_1} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Se concluye que $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\square$

(3) Resuelva el sistema $x + 2y - z = 1$; $x + 1 = y - z$; $2x - 3y = 2z - 4$ usando el método que le parezca mas apropiado

(10 puntos)

Solución:

$$x + 2y - z = 1$$

$$x - y + z = -1$$

$$2x - 3y - 2z = -4$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 3 - 2 + 3 + 4 = 14$$

Usemos Cramer para resolver el sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{2-8-3+4+3-4}{14} = -\frac{6}{14} = -\frac{3}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \frac{2+2+4-2+4+2}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}}{14} = \frac{4-4-3+2-3+8}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \quad \square$$