

**PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE : _____ CARRERA: _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Vi 23/09/22

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) V Los valores propios de una matriz antisimétrica no nula de orden 2, son siempre complejos.

Justificación:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \text{ con } a \neq 0 \text{ es una matriz antisimétrica no nula de orden 2}$$

Calculemos los valores propios

$$\begin{vmatrix} -\alpha & a \\ -a & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -a^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = |a|i \\ \alpha_2 = -|a|i \end{cases}$$

Esto muestra que los valores propios son siempre complejos. ☐

b) F $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ posee elemento igual a -1 en la posición (1,2)

Justificación:

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6 - 0 - 0 - 1 = 5 \neq 0$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 6) = 5$$

$$\text{Luego, } a_{12}^{-1} = \frac{c_{21}}{|A|} = \frac{5}{5} = 1 \neq -1 \quad \square$$

c) F $\det(P \cdot M) = \frac{1}{4}$, si $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Justificación:

$P \cdot M$ no existe, pues P es de orden 3×3 y M es de orden 2×2 $\square$

d) F Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, con
 $a_{ij} = \begin{cases} -1 & , i > j \\ 1 & , i \leq j \end{cases}$; $b_{ij} = \frac{i}{i+j-1}$, entonces $(2A^2 \cdot B)^{-1} = \frac{1}{2}(A^{-1})^2 \cdot B^{-1}$

Justificación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(A^{-1})^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{6}} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 6 \begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^2 B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4/3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A^2 \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 8/3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(2A^2 \cdot B)^{-1} = \frac{1}{-8+\frac{32}{3}} \begin{bmatrix} -2 & -8/3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{8}{3}} \begin{bmatrix} -2 & -8/3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} -2 & -8/3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A^{-1})^2 \cdot B^{-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Observamos que $(2A^2 \cdot B)^{-1} \neq \frac{1}{2}(A^{-1})^2 \cdot B^{-1}$ $\square$

(40 puntos)

2) Resuelva el sistema

$$3x + 2y - z = 1$$

$$x = -y - 3 + 2z$$

$$y = 5 - 2z + x$$

(10 puntos)

Solución:

$$3x + 2y - z = 1 \Rightarrow 3x + 2y - z = 1$$

$$x = -y - 3 + 2z \Rightarrow x + y - 2z = -3$$

$$y = 5 - 2z + x \Rightarrow -x + y + 2z = 5$$

Calculemos la determinante de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 1 - 1 + 6 - 4 = 10 \neq 0$$

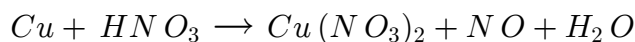
Usemos Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{2-20+3+5+2+12}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{10} = \frac{-18+2-5+3+30-2}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{10} = \frac{15+6+1+1+9-10}{10} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5} \quad \square$$

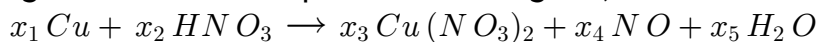
3) Resuelva el sistema asociado a la ecuación química



(10 puntos)

Solución:

Asignamos a cada compuesto una incógnita, es decir



Ahora para cada elemento químico escribimos la ecuación correspondiente, recordando que los reactantes menos los productos es igual a cero

$$Cu : x_1 - x_3 = 0 \quad (1)$$

$$H : x_2 - 2x_5 = 0 \quad (2)$$

$$N : x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \quad (3)$$

$$O : 3x_2 - 6x_3 - x_4 - x_5 = 0 \quad (4)$$

Escribiendo el sistema homogéneo anterior en forma matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2(-1)+F_3; F_2(-3)+F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow F_3(-3)+F_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hagamos $x_5 = 4$ (el sistema posee infinitas soluciones)

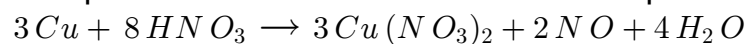
$$2x_4 = x_5 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2} x_5 = 2$$

$$-2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \Rightarrow 2x_3 = 2x_5 - x_4 = 8 - 2 = 6 \Rightarrow x_3 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_5 = 8$$

$$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = 3$$

Reemplazando estos valores en la ecuación química



Observación: Podríamos haber reducido el número de incógnitas y ecuaciones sabiendo que $x_1 = x_3$, y reemplazando donde corresponda, generando un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas. $\square$