

**PAUTA PRUEBA N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA
AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

NOMBRE : _____ **CARRERA :** _____

TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS

FECHA : Mi 11/09/19

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), justificando todas sus respuestas.

a) F Todas las matrices antisimétricas poseen inversa, excluyendo la matriz nula.

Justificación:

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, distinta de la nula, es antisimétrica, pues

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Ahora, $|A| = 0 - 6 + 6 - 0 - 0 - 0 = 0$

Esto muestra que A no posee inversa. ☐

b) V La ecuación $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$, no posee raíces reales

Justificación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow 1 - x^2 + 0 - 0 + 1 - 0 = 3 \Rightarrow 2 - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = i \in \mathbb{C} \\ x_2 = -i \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Esto muestra que la ecuación dada no posee raíces reales. ☐

c) F Si A es una matriz ortogonal y B es una matriz triangular superior no singular, ambas de orden 2, entonces $|3A^T - B^{-1}|$ siempre es distinto de cero.

Justificación:

Se tiene que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz ortogonal, pues $A^T A = I^T I = I$, y además $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ es una matriz triangular superior.

Luego: $3A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $B^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{9}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Finalmente, $3A^T - B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $|3A^T - B^{-1}| = 0$ $\square$

d) F El sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = x_3 \\ 2x_2 = 2x_1 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ posee el mismo vector solución que

el sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 4z + 5y - 2x = 1 \\ 3x + 5z = -y + 4 \end{cases}$

Justificación:

Resolvamos el sistema $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 4z + 5y - 2x = 1 \\ 3x + 5z = -y + 4 \end{cases}$ usando el método de Cramer

$$2x + 2y = 1$$

$$-2x + 5y + 4z = 1$$

$$3x + y + 5z = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 50 + 24 - 0 - 0 - 8 + 20 = 86 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{86} = \frac{25+32+0-0-4-10}{86} = \frac{43}{86} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{86} = \frac{10+12+0-0-32+10}{86} = \frac{0}{86} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{86} = \frac{40+6-2-15-2+16}{86} = \frac{43}{86} = \frac{1}{2}$$

Reemplazando estos valores en el sistema $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = x_3 \\ 2x_2 = 2x_1 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ se tiene:

$$2x_1 - x_2 = 2\frac{1}{2} - 0 = 1 \neq x_3 = \frac{1}{2} \text{ (asumiendo } x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$$

$$2x_1 - x_2 = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq x_3 = 0 \text{ (asumiendo } x_1 = x, x_2 = z, x_3 = y)$$

$$2x_1 - x_2 = 2(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq x_3 = \frac{1}{2} \text{ (asumiendo } x_1 = y, x_2 = x, x_3 = z)$$

Como $x = z$, lo anterior muestra que los sistemas dados no tienen el mismo vector solución. $\square$

(40 puntos).

(2) Resuelva el sistema

$$2x + y = -1 + z$$

$$x - y = z$$

$$3z = 1 - 2x + 4y$$

usando el método de la inversa

(20 puntos).

Solución:

Ordenemos el sistema:

$$2x + y - z = -1$$

$$x - y - z = 0$$

$$2x - 4y + 3z = 1$$

En forma matricial:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 4 - 2 - 8 - 3 = -17 \neq 0$$

Calculemos la inversa de A usando operaciones elementales

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_{12}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_1(-2)+F_2; F_1(-2)+F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_2(1/3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_2(2)+F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 17/3 & 2/3 & -10/3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F_3(3/17)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/17 & -10/17 & 3/17 \end{array} \right) \rightarrow F_3(-1/3)+F_2; F_3(1)+F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2/17 & 7/17 & 3/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 & -8/17 & -1/17 \\ 0 & 0 & 1 & 2/17 & -10/17 & 3/17 \end{array} \right) \rightarrow F_2(1)+F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/17 & -1/17 & 2/17 \\ 0 & 1 & 0 & 5/17 & -8/17 & -1/17 \\ 0 & 0 & 1 & 2/17 & -10/17 & 3/17 \end{array} \right)$$

De lo anterior, se obtiene: $A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & -1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

El método de la inversa dice que

$$\mathbf{x} = A^{-1} \mathbf{b} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 5 & -8 & -1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir, $x = -\frac{5}{17}$; $y = -\frac{6}{17}$; $z = \frac{1}{17}$ $\square$