UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Lu 06/04/26

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

$a)$ ___F___ Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, entonces $(A^3)^T = A^T$

Justificación:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A^3)^T = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = A^T \quad \square$$

$b)$ ___V___ La inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ posee elemento igual a -1 en la posición $(1,3)$.

Justificación:

Tenemos que $a_{13}^{-1} = \frac{c_{31}}{|A|}$

$$|A| = 6 - 9 + 6 - 2 = 1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}|A_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$$

Finalmente, $a_{13}^{-1} = \frac{c_{31}}{|A|} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \square$

$c)$ ___F___ Si $R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 3 & -3 \end{pmatrix}$, entonces

$|(S^T \cdot S)^{-1}| + |(R \cdot R^T)^{-1} + 3I| > 10$

Justificación:

$$S^T \cdot S = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$$

Notemos que $|S^T \cdot S| = 81 - 81 = 0$

Esto muestra que $(S^T \cdot S)^{-1}$ no existe, por que el enunciado es falso. $\square$

$d)$ ___V___ $det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 38 \end{bmatrix} = 77$

Justificación:
Usemos la definición de determinante con $i = 1$

Sea A la matriz dada.

$|A| = \sum_{j=1}^{4} a_{1j}\, c_{1j} = a_{11}\, c_{11} + a_{12}\, c_{12} + a_{13}\, c_{13} + a_{14}\, c_{14} = c_{12} + c_{13} + c_{14}$

$c_{12} = (-1)^{1+2}\,|A_{12}| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 38 \end{vmatrix} = -(-76 + 1 + 1 + 2 - 1 - 38) = 111$

$c_{13} = (-1)^{1+3}\,|A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 38 \end{vmatrix} = 38 + 2 + 1 - 1 - 1 - 76 = -37$

$c_{14} = (-1)^{1+4}\,|A_{14}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4 + 1 - 1 + 2 - 2) = 3$

$|A| = c_{12} + c_{13} + c_{14} = 111 - 37 + 3 = 77$ $\square$

(40 puntos)

2) Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -x_3 + 1 \\ x_3 - x_2 &= 5x_1 - 6 \\ x_2 + 3x_3 &= 4x_1 - 4 \end{aligned}$$

(10 puntos)

<u>Solución:</u>

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -x_3 + 1 \Rightarrow 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 - x_2 &= 5x_1 - 6 \Rightarrow 5x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_2 + 3x_3 &= 4x_1 - 4 \Rightarrow 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \end{aligned}$$

El sistema matricial asociado es

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculemos la determinante de la matriz asociada

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -9+8-5-4-3-30 = -43 \neq 0$$

Usemos el método de Cramer para resolver el sistema

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-43} = \frac{-3+8-6-4-1-36}{-43} = \frac{-42}{-43} = \frac{42}{43}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{-43} = \frac{-54-4+20-24+12+15}{-43} = \frac{-35}{-43} = \frac{35}{43}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-43} = \frac{12-48-5-4+18+40}{-43} = \frac{13}{-43} = -\frac{13}{43}$$

Finalmente, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{42}{43} \\ \frac{35}{43} \\ -\frac{13}{43} \end{pmatrix}$ ❑

3) Obtenga A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$

(10 puntos)

<u>Solución:</u>

En primer lugar, calculemos la determinante de A.

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$$

Veamos para qué valores de a la inversa no existe.

$$|\,A\,| = 0 \Rightarrow 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -1 \end{cases}$$

En lo que sigue consideraremos que $a \neq 1$ y $a \neq -1$.

Usemos el método de la adjunta para calcular la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{|\,A\,|}\,Adj(A), \text{ con } Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -a$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1}|A_{21}| = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-a) = a-1$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}|A_{22}| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}|A_{32}| = -\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -(a^2-1) = 1-a^2$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}|A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}|A_{23}| = -\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a) = -a$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}|A_{33}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,Adj(A) = \frac{1}{1-a^2}\begin{pmatrix} -a & 1 & 0 \\ a-1 & a-1 & 1-a^2 \\ 1 & -a & 0 \end{pmatrix} \square$$