

PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Ju 17/04/25**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $(A^2)^T - A = A^T$

Justificación:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^2)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$(A^2)^T - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \neq A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

b) F $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ posee elemento igual a 0 en la posición (3, 2)

Justificación:

Tenemos que $a_{32}^{-1} = \frac{1}{|A|} c_{23}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 0 + 1 + 2 - 0 - 2 = -2$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} |A_{23}| = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1$$

Finalmente, $a_{32}^{-1} = \frac{1}{|A|} c_{23} = \frac{1}{-2}(-1) = \frac{1}{2} \neq 0 \quad \square$

c) F $\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -3$

Justificación:

Usemos la definición de determinante, usando la fila $i = 4$

Sea A la matriz indicada en el enunciado.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^4 a_{4j} c_{4j} = a_{41}c_{41} + a_{42}c_{42} + a_{43}c_{43} + a_{44}c_{44} =$$

$$0c_{41} + 2c_{42} + c_{43} + 0c_{44} = 2c_{42} + c_{43}$$

$$c_{42} = (-1)^{4+2} |A_{42}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 + 0 - 0 + 2 - 3 = -6$$

$$c_{43} = (-1)^{4+3}$$

$$|A_{43}| = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 4 + 0 - 0 - 0 + 6) = -9$$

$$\text{Finalmente, } \det(A) = 2c_{42} + c_{43} = 2(-6) - 9 = -12 - 9 = -21 \neq -3 \quad \square$$

d) F Si a y b son los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$a + b = \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right|$$

Justificación:

En primer lugar, analicemos si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ posee inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 6 - 0 - 0 + 1 = 9 \neq 0$$

Esto muestra que A posee inversa y además $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{9}$

Calculemos ahora los valores propios de $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|B - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$= \frac{2(1 \pm 2)}{2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} a = 1 + 2 = 3 \\ b = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Luego, } a + b = 3 - 1 = 2 \neq \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right| = \frac{1}{9} \quad \square$$

(40 puntos)

2) Resuelva el sistema $3x - 2y = z + 1$; $x - y = 3z + 2$; $2x - 4y - z = 2y$ usando el método de Cramer

(10 puntos)

Solución:

$$3x - 2y = z + 1 \Rightarrow 3x - 2y - z = 1$$

$$x - y = 3z + 2 \Rightarrow x - y - 3z = 2$$

$$2x - 4y - z = 2y \Rightarrow 2x - 6y - z = 0$$

En la forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 12 + 6 - 2 - 54 - 2 = -37$$

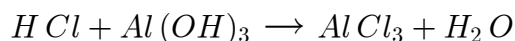
$$x \equiv x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{1+0+12-0-18-4}{-37} = \frac{-9}{-37} = \frac{9}{37}$$

$$y \equiv x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{-6-6+0+4-0+1}{-37} = \frac{-7}{-37} = \frac{7}{37}$$

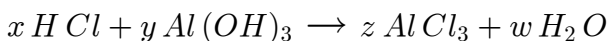
$$z \equiv x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix}}{-37} = \frac{0-8-6+2+36-0}{-37} = \frac{24}{-37} = -\frac{24}{37}$$

$$\text{Finalmente, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{37} \\ \frac{7}{37} \\ -\frac{24}{37} \end{pmatrix} \quad \square$$

3) Resuelva el sistema asociado al balanceo de la ecuación química



(10 puntos)

Solución:

$$H : x + 3y - 2w = 0$$

$$Cl : x - 3z = 0$$

$$Al : y - z = 0$$

$$O : 3y - w = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_1(-1)+F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_{23}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(3)+F_3; F_2(-3)+F_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{F_3(1/2)+F_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que $r(A) = 3 = r(A : \mathbf{b}) < n = 4$, por lo que el sistema posee infinitas soluciones. Debemos fijar $n - r(A) = 4 - 3 = 1$ incógnita. Fijemos $w = c$

$$-6z + 2c = 0 \Rightarrow 6z = 2c \Rightarrow z = \frac{1}{3}c$$

$$y - z = 0 \Rightarrow y = z = \frac{1}{3}c$$

$$x + 3y - 2c = 0 \Rightarrow x = 2c - 3y \Rightarrow x = 2c - 3 \cdot \frac{1}{3}c = 2c - c = c$$

Consideremos $c = 3$, luego $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$, $w = 3$

Para finalizar, reemplacemos estos valores en la ecuación química

