UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS FECHA : Ju 04/04/24

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) ___V___ Si $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces $\frac{1}{2}(A^T - A)$ es siempre antisimétrica

Justificación:

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$A^T - A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ -(c-b) & 0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}(A^T - A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(c-b) \\ -\frac{1}{2}(c-b) & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica ❑

b) ___V___ Si $R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces $R \cdot R^T + 3\,I_3$ es simétrica

Justificación:

$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R \cdot R^T + 3\,I_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ es simétrica ❑

c) ___V___ $det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 6$

Justificación:

Usemos la definición de determinante, considerando $i = 1$

$$det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{4}a_{1j}\,c_{1j}=a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+a_{13}c_{13}+a_{14}c_{14}$$

$$=1\,c_{11}+0\,c_{12}+1\,c_{13}+0\,c_{14}=c_{11}+c_{13}$$

$$c_{11}=\begin{vmatrix}0 & 3 & -2\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=0+0+2-0-0+6=8$$

$$c_{13}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=-2+0+0-0-0-0=-2$$

Luego $det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=c_{11}+c_{13}=8-2=6$ ❑

$d)$ __V____ El sistema $ax+y=6$; $x-a\,y=1$ siempre posee solución, no importando el valor de $a\in\mathbb{R}$

Justificación:

Escribamos el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}$$

Trabajemos con la matriz ampliada para btener rangos, considerando $a\neq 0$

$$\begin{pmatrix}a & 1 & | & 6\\ 1 & -a & | & 1\end{pmatrix}\longrightarrow_{F_{12}}\begin{pmatrix}1 & -a & | & 1\\ a & 1 & | & 6\end{pmatrix}\longrightarrow_{F_1(-a)+F_2}\begin{pmatrix}1 & -a & | & 1\\ 0 & 1+a^2 & | & 6-a\end{pmatrix}$$

Observamos que $1+a^2$ es siempre distinto de cero para cualquier valor de a, en particular si a es distinto de cero. Luego $r_A=2=r_{Ab}=N$, es decir, si $a\neq 0$ el sistema siempre posee una solución.

Ahora si $a=0$, podemos reemplazar en el sistema original para obtener

$0\,x+y=6\Rightarrow y=6$

$x-0\,y=1\Rightarrow x=1$

Esto muestra que si $a=0$, entonces el sistema también posee una solución.

Finalmente podemos decir que el sistema dado siempre posee solución, no importando el valor de $a\in\mathbb{R}$ ❑

(40 puntos)

2) Calcule la inversa de $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, usando el método de la adjunta.

(10 puntos)

Solución:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A) = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 2 - 0 - 0 + 1 = 2 \neq 0$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+1) = 0$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+2) = -3$$

$$c_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$$

$$c_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$c_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

$$c_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

Reemplazando en $(*)$: $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ❑

3) Resuelva el sistema asociado al balanceo de la ecuación química

$$Al_2\,S_3 + H_2O \longrightarrow Al\,(OH)_3 + H_2\,S$$

(10 puntos)

Solución:

$$x\,Al_2\,S_3 + y\,H_2O \longrightarrow z\,Al\,(OH)_3 + w\,H_2\,S$$

$Al:\ 2x - z = 0$
$S: 3x - w = 0$
$H: 2y - 3z - 2w = 0$
$O: y - 3z = 0$

Escribamos el sistema en forma matricial ampliada, para aplicar el método de Gauss

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow_{F_1(-3/2)+F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_{24}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_2(-2)+F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_3(-1/2)+F_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos que $r_A = 3 = r_{Ab} < N = 4$

Debemos fijar $N - r_A = 4 - 3 = 1$ incógnita

Fijemos $z = c$

$3c - 2w = 0 \Rightarrow 2w = 3c \Rightarrow w = \frac{3}{2}\,c$

$y - 3c = 0 \Rightarrow y = 3c$

$2x - c = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\,c$

Observamos que 2 es un valor apropiado para c, pues necesitamos que las incógnitas tomen valores enteros positivos. Luego, $x = 1$, $y = 6$, $z = 2$, $w = 3$, es decir,

$1\,Al_2\,S_3 + 6\,H_2O \longrightarrow 2\,Al\,(OH)_3 + 3\,H_2\,S$ $\square$