

**PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL**  
**INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA**

**NOMBRE :** \_\_\_\_\_ **CARRERA:** \_\_\_\_\_  
**TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS** **FECHA : Ju 04/04/24**

**1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.**

a) V Si  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , entonces  $\frac{1}{2}(A^T - A)$  es siempre antisimétrica

**Justificación:**

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$A^T - A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ b-c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c-b \\ -(c-b) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(A^T - A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(c-b) \\ -\frac{1}{2}(c-b) & 0 \end{pmatrix} \text{ es antisimétrica } \square$$

b) V Si  $R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , entonces  $R \cdot R^T + 3I_3$  es simétrica

**Justificación:**

$$R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R \cdot R^T + 3I_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ es simétrica } \square$$

c) V  $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 6$

**Justificación:**

Usemos la definición de determinante, considerando  $i = 1$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^4 a_{1j} c_{1j} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + a_{14}c_{14}$$

$$= 1c_{11} + 0c_{12} + 1c_{13} + 0c_{14} = c_{11} + c_{13}$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 0 + 6 = 8$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = -2$$

Luego  $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = c_{11} + c_{13} = 8 - 2 = 6 \quad \square$

d) V El sistema  $ax + y = 6$ ;  $x - ay = 1$  siempre posee solución, no importando el valor de  $a \in \mathbb{R}$

**Justificación:**

Escribamos el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trabajemos con la matriz ampliada para obtener rangos, considerando  $a \neq 0$

$$\left( \begin{array}{cc|c} a & 1 & 6 \\ 1 & -a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_{12}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1(-a)+F_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1+a^2 & 6-a \end{array} \right)$$

Observamos que  $1 + a^2$  es siempre distinto de cero para cualquier valor de  $a$ , en particular si  $a$  es distinto de cero. Luego  $r_A = 2 = r_{Ab} = N$ , es decir, si  $a \neq 0$  el sistema siempre posee una solución.

Ahora si  $a = 0$ , podemos reemplazar en el sistema original para obtener

$$0x + y = 6 \Rightarrow y = 6$$

$$x - 0y = 1 \Rightarrow x = 1$$

Esto muestra que si  $a = 0$ , entonces el sistema también posee una solución.

Finalmente podemos decir que el sistema dado siempre posee solución, no importando el valor de  $a \in \mathbb{R} \quad \square$

(40 puntos)

2) Calcule la inversa de  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , usando el método de la adjunta.

(10 puntos)

**Solución:**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 2 - 0 - 0 + 1 = 2 \neq 0$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$c_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1 + 1) = 0$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + 2) = -3$$

$$c_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$$

$$c_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

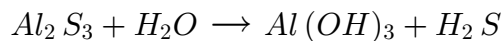
$$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1$$

$$c_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$c_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

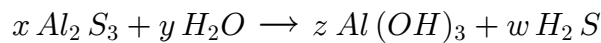
$$\text{Reemplazando en } (*) : A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \square$$

**3) Resuelva el sistema asociado al balanceo de la ecuación química**



**(10 puntos)**

**Solución:**



$$\text{Al} : 2x - z = 0$$

$$\text{S} : 3x - w = 0$$

$$\text{H} : 2y - 3z - 2w = 0$$

$$\text{O} : y - 3z = 0$$

Escribamos el sistema en forma matricial ampliada, para aplicar el método de Gauss

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc|c}
 x & y & z & w & \\
 \hline
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & -3 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow F_1(-3/2)+F_2 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc|c}
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \\
 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & -3 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow F_{24}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc|c}
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 2 & -3 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow F_2(-2)+F_3 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc|c}
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \rightarrow F_3(-1/2)+F_4$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc|c}
 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Tenemos que  $r_A = 3 = r_{Ab} < N = 4$

Debemos fijar  $N - r_A = 4 - 3 = 1$  incógnita

Fijemos  $z = c$

$$3c - 2w = 0 \Rightarrow 2w = 3c \Rightarrow w = \frac{3}{2}c$$

$$y - 3c = 0 \Rightarrow y = 3c$$

$$2x - c = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}c$$

Observamos que 2 es un valor apropiado para  $c$ , pues necesitamos que las incógnitas tomen valores enteros positivos. Luego,  $x = 1$ ,  $y = 6$ ,  $z = 2$ ,  $w = 3$ , es decir,

