

PAUTA CERTAMEN N° 1 ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 40 MINUTOS **FECHA : Ju 20/04/23**

(1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $(A^3)^T = A^T$

Justificación:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A^3)^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

b) F El producto de una matriz ortogonal por otra diagonal siempre es idempotente, para matrices distintas de la idéntica.

Justificación:

La matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq I$ es ortogonal, pues

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

La matriz $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I$ es una matriz diagonal

Pero $AD = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ no es idempotente, pues

$$(AD)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \neq AD = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \square$$

c) F La matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $a_{ij} = \begin{cases} (-2)^{i+j} & , i \neq j \\ 0 & , i = j \end{cases}$ es

tal que $\frac{1}{2}(A^T - A^{-1})$ es antisimétrica.

Justificación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-2)^{1+2} & (-2)^{1+3} \\ (-2)^{2+1} & 0 & (-2)^{2+3} \\ (-2)^{3+1} & (-2)^{3+2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (-2)^3 & (-2)^4 \\ (-2)^3 & 0 & (-2)^5 \\ (-2)^4 & (-2)^5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -8 & 16 \\ -8 & 0 & -32 \\ 16 & -32 & 0 \end{bmatrix} = A^T$$

$$|A| = 0 + 4096 + 4096 - 0 - 0 - 0 = 8192 \neq 0$$

Calculemos el elemento p_{11} en la posición $(1,1)$ de A^{-1}

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -32 \\ -32 & 0 \end{vmatrix} = -1024$$

$$p_{11} = -\frac{1024}{8192} = -\frac{1}{8}$$

Luego, el elemento en la posición $(1,1)$ de $B = \frac{1}{2}(A^T - A^{-1})$ es

$$b_{11} = \frac{1}{2}(0 - (-\frac{1}{8})) = \frac{1}{2}(\frac{1}{8}) = \frac{1}{16} \neq 0$$

Esto muestra que B no es antisimétrica. $\square$

d) F Sea a el mayor valor propio de $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, entonces

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} + a = -1$$

Justificación:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$|A - tI| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-t & -2 \\ -2 & 4-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-t)(4-t) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$4 - t - 4t + t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t = 0 \Rightarrow t(t-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 5 \end{cases}$$

De lo anterior se tiene que $a = 5$

Calculemos ahora la determinante considerada.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{14}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(2)+F_3; F_2(3)+F_4}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-3/7)+F_4} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

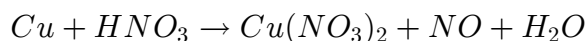
Dado que se realizó un cambio de filas el determinante cambia de signo, es decir,

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -(-3)(-1)(7)\left(\frac{1}{7}\right) = -3$$

Finalmente, $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} + a = -3 + 5 = 2 \neq -1$ $\square$

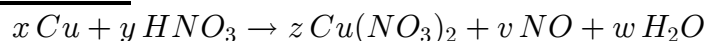
(40 puntos)

(2) Usando el método algebraico, balancee la ecuación química



(10 puntos)

Solución:



$$Cu : x - z = 0$$

$$H : y - 2w = 0$$

$$O : 3y - 6z - v - w = 0$$

$$N : y - 2z - v = 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & v & w & \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & -1 & : & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & F_2(-3)+F_3; F_2(-1)+F_4 & & \\ \hline \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 5 & : & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & F_3(-1/3)+F_4 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 5 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 & : & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tenemos que $r_1 = 4 = r_2 < N = 5$, es decir, tenemos que fijar

$N - r_1 = 5 - 4 = 1$ incógnita. Fijemos $v = c$

$$-\frac{2}{3}v + \frac{1}{3}w = 0 \Rightarrow -2v + w = 0 \Rightarrow w = 2v \Rightarrow w = 2c$$

$$-6z - v + 5w = 0 \Rightarrow 6z = 5w - v \Rightarrow 6z = 10c - c \Rightarrow 6z = 9c \Rightarrow z = \frac{9}{6}c \Rightarrow$$

$$z = \frac{3}{2}c$$

$$y - 2w = 0 \Rightarrow y = 2w \Rightarrow y = 4c$$

$$x - z = 0 \Rightarrow x = z \Rightarrow x = \frac{3}{2}c$$

Ahora debemos elegir un valor de c de modo que todas las incógnitas tomen los menores valores naturales posibles. Consideremos $c = 2$, luego

$$x = 3; y = 8; z = 3; v = 2; w = 4$$

La ecuación balanceada es



(3) Resuelva el sistema $3x - 2y + z = 2$; $x = y - z$; $2x + 4y = z + 1$ usando el método que le parezca mas apropiado

(10 puntos)

Solución:

El sistema es

$$3x - 2y + z = 2$$

$$x - y + z = 0$$

$$2x + 4y - z = 1$$

Usemos el método de Cramer

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 4 + 2 - 12 - 2 = -9 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{2-2+0+1-8-0}{-9} = \frac{-7}{-9} = \frac{7}{9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{0+4+1-0-3+2}{-9} = \frac{4}{-9} = -\frac{4}{9}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-3+0+8+4-0+2}{-9} = \frac{11}{-9} = -\frac{11}{9} \quad \square$$