

**PAUTA PRUEBA N° 1 ÁLGEBRA LINEAL**  
**INGENIERÍA AGROINDUSTRIAL – INGENIERÍA**  
**AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA – INGENIERÍA EN**  
**ALIMENTOS**

**NOMBRE :** \_\_\_\_\_ **CARRERA :** \_\_\_\_\_  
**TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS** **FECHA : Mi 05/04/17**

**(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), justificando todas sus respuestas.**

a) F  $\mathbf{x}^t + \mathbf{y}^t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$  si  $\mathbf{x}^t = [x_1 \ x_2 \ x_3]$  es la solución del sistema  
 $4x_1 - x_2 = x_3$  ;  $x_2 = x_1 - 2 + 2x_3$  ;  $2x_3 + x_1 = -1$  y

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Justificación:**

Tenemos que

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego  $\mathbf{y}^t = [1 \ -2 \ 1]$

Pero

$$\mathbf{x}^t + \mathbf{y}^t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} - \mathbf{y}^t$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^t = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} - [1 \ -2 \ 1] = \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & \frac{20}{9} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = [x_1 \ x_2 \ x_3]$$

Reemplazando estos valores en la primera ecuación del sistema, se tiene

$$4x_1 - x_2 = 4\left(-\frac{10}{9}\right) - \frac{20}{9} = -\frac{40}{9} - \frac{20}{9} = -\frac{60}{9} = -\frac{20}{3} \neq x_3 = -\frac{4}{3}$$

Esto muestra que  $\mathbf{x}^t + \mathbf{y}^t \neq \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$  si  $\mathbf{x}^t = [x_1 \ x_2 \ x_3]$  es la solución del sistema  $4x_1 - x_2 = x_3$ ;  $x_2 = x_1 - 2 + 2x_3$ ;  $2x_3 + x_1 = -1$  y  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$   $\square$

b) F Si  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  y  $B = (b_{ij})_3$ , con  $b_{ij} = \frac{i+j}{2}$ , entonces  $(AB)^{-1}$  es una matriz antisimétrica.

**Justificación:**

Tenemos que

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

Calculemos  $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2} & -7 & -\frac{17}{2} \\ -3 & -4 & -5 \\ -\frac{7}{2} & -5 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

Calculemos los elementos de  $(AB)^{-1}$ , si es posible, usando el método de la adjunta.

$$|A \cdot B| = -143 - \frac{245}{2} - \frac{255}{2} + 119 + \frac{273}{2} + \frac{275}{2} = 24 - 24 = 0$$

Observamos que el determinante de la matriz  $A \cdot B$  es cero, es decir,  $(AB)^{-1}$  no existe.

En forma adicional, mencionemos que  $|B| = 0$  y con este resultado ya podíamos concluir que el determinante de  $A \cdot B$  era igual a cero.  $\square$

c) F Si  $A$  es una matriz ortogonal y  $B$  es una matriz escalar, entonces  $|A^T \cdot B^{-1}| = 1$

**Justificación:**

Usando propiedades, notemos que

$$|A^T \cdot B^{-1}| = |A^T| |B^{-1}| = |A| \frac{1}{|B|}$$

La matriz  $A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  es ortogonal, pues  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

La matriz  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  es escalar

Luego  $|A| = 1$  y  $|B| = 4$

Finalmente,  $|A^T \cdot B^{-1}| = |A| \frac{1}{|B|} = \frac{1}{4} \neq 1$   $\square$

$$d) \text{ \underline{F} } \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

**Justificación:**

Usemos la definición de determinante, considerando  $i = 4$

$$|A| = \sum_{j=1}^4 a_{4j} c_{4j} = a_{41} c_{41} + a_{42} c_{42} + a_{43} c_{43} + a_{44} c_{44}$$

$$= 0 c_{41} + 0 c_{42} + c_{43} - c_{44} = c_{43} - c_{44}$$

$$c_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-16 - 8) = 24$$

$$c_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 12 - 2 - 6 = -19$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = c_{43} - c_{44} = 24 + 19 = 43 \neq -1 \quad \square$$

(40 puntos).

**(2) Resuelva el sistema**

$$2x + y = -1 + z$$

$$x - y = z$$

$$3z = 1 - 2x + 4y$$

usando el método de Cramer

(20 puntos).

**Solución:**

Reordenando los elementos del sistema

$$2x + y - z = -1$$

$$x - y - z = 0$$

$$2x - 4y + 3z = 1$$

Matricialmente

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 4 - 2 - 8 - 3 = -17 \neq 0$$

Como el sistema es cuadrado y  $|A| \neq 0$ , podemos usar el método de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{3-1+0-1+4-0}{-17} = -\frac{5}{17}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{0+2-1-0+2+3}{-17} = -\frac{6}{17}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-2+0+4-2-0-1}{-17} = \frac{1}{17}$$

Finalmente, el vector solución es  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{17} \\ -\frac{6}{17} \\ \frac{1}{17} \end{bmatrix}$   $\square$