UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño
Octubre 2026

LISTADO 3 DE EJERCICIOS DE ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando su respuesta.

$a)$ _____ Si $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ es l.i., entonces $\{3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{c}\}$ también lo es.

$b)$ _____ Si $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / \, x - 2y + 3z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$, entonces $dim(S) = 2$

$c)$ _____ La función lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f[x, y, z] = [x - 5y, x + 3y, 2z - y + 2x]$ posee inversa.

$d)$ _____ Los vectores propios de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ forman siempre una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$, si tales vectores son considerados como vectores fila.

$e)$ _____ Los valores propios del operador T son irracionales, si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $T[x, y] = [2x + 3y, 6x - 2y]$

$f)$ _____ Todas las transformaciones lineales $f : V \longrightarrow V$ inyectivas, poseen inversa.

$g)$ _____ Si $P : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es una transformación lineal tal que $P(A) = MA$, con $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces P posee inversa.

$h)$ _____ Si p y q son vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$, entonces $\|p \times q\|^2 + \, < p, q >^2 = 1$

$i)$ _____ La transformación $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $T(p(x)) = \frac{dp}{dx}\Big|_{x=1}$ es tal que $Im(T) = \mathbb{R}$

$j)$ _____ Si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un operador lineal tal que $[T]^{-1}_{BB} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, con $B = \{[1, 3], [-1, 1]\}$, entonces $T[-2, 2] \neq \theta$

$k)$ _____ $dim(S) > dim(T)$, donde $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A$ es antisimétrica$\}$ y $T = \{ax^2 + ax + a, \, a \in \mathbb{R}\}$

$l)$ _____ Las matrices simétricas de orden 2 siempre son ortogonales a las matrices antisimétricas de orden 2

$m)$ _____ Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\|u\| = \|v\|$, entonces $\alpha u + v$ y $u - \alpha v$ son vectores perpendiculares, no importando el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$

$n)$ _____ Si $R[1, -1, 3] = [1, 2, 4]$, $R[1, 0, 1] = [2, -2, 2]$ y $R[1, -1, 0] = [1, 1, 1]$, entonces R es biyectiva.

$o)$ _____ $dim(Nuc(T)) = 1$ si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T\,[x, y, z] = [\,x - y, y - z, z - x]$

$p)$ _____ Si $traza(A) = 3$, $\|A\|_2 = 1$ y $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces $det(A) = 1$

$q)$ _____ Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \neq \theta$. Tenemos que si **u** es un vector cualquiera, entonces $\mathbf{u} - \frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}>}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a **v**

$r)$ _____ Si $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es tal que $T(A) = < A, A >$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $dim(Nuc(T)) \neq 0$

$s)$ _____ $\{1, x-1, x^2-1\}$ es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$t)$ _____ Si $A = < \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} >$, entonces $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in A$

$u)$ _____ Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares, entonces los vectores $proy_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ y $proy_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ son ortogonales en $\mathbb{R}^3$

$v)$ _____ Si $\boldsymbol{v} = [2, 1, -a]$ y $\boldsymbol{w} = [0, a, 0]$, con $a \neq 0$, entonces el conjunto $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\}$ es siempre base de $\mathbb{R}^3$

$w)$____ La imagen de la aplicación $D : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $D(p(x)) = p'(x)$ es el conjunto de todos los reales.

$x)$ _____ Si $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son vectores ortogonales, entonces $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ es unitario.

$y)$ _____ Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores paralelos no nulos, entonces $\{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{b}\}$ siempre es base de $\mathbb{R}^3$

$z)$ _____ Los vectores propios de $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ forman una base para $\mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R})$

$a1)$ _____ El conjunto $\{[3, 1], [-1, \frac{1}{3}]\}$ es $l.i.$, pero no es base de $\mathbb{R}^2$

$b1)$ _____ Todas las matrices de norma igual a 1 son ortogonales

$c1)$ _____ $\| A \|_F = \| A \|_\infty$ si A es antisimétrica.

$d1)$_____ La norma espectral de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es $\sqrt{4 + \sqrt{5}}$

$2)$ Obtenga una base ortonormal para $\mathbb{R}^2$, diferente de la canónica y sus derivados.

3) Sea $f : \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$ la transformación lineal donde 1 y -3 son valores propios de f y cuyos vectores propios correspondientes son $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre la definición de f.

4) Muestre que si T es una función lineal biyectiva de V en $\mathbb{R}^4$, entonces toda base de V contiene 4 elementos

5) Calcule $J[2, 1, -1]$, si para $J : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ se tiene que $\left[J\right]_{B_1B_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$