

LISTADO 2 DE EJERCICIOS DE ÁLGEBRA LINEAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando su respuesta.

a) _____ El plano que pasa por los puntos $(1, 0, 3)$, $(2, 1, 0)$ y $(1, 0, -2)$ interseca a la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 2t + 2$

b) _____ El ángulo formado por los planos $x + 2y + z = 2$ y $-x + 2y + z = 2$ es 43.2°

c) _____ El punto $(\frac{9}{8}a, -\frac{13}{8}a, a)$, con $a \neq 0$, pertenece a la intersección de los planos $3x - y + z = 6a$ y $2x + 2y + 3z = 2a$

d) _____ El triángulo de vértices $(2, 1, -1)$, $(2, 1, 1)$ y $(0, -1, 1)$ es isósceles.

e) _____ El área del triángulo cuyos vértices son $(2, -2, 1)$, $(1, 2, -3)$ y $(1, a - 1, 2 - a)$, con $a > 0$, es siempre mayor que $\sqrt{3}$

f) _____ El conjunto $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A^T = -A\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

g) _____ El conjunto $R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

h) _____ El punto de intersección entre el plano $\pi: x - y + z = 1$ y la recta $L: \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ 2x + y = z - 2 \end{cases}$ posee solo dos componentes positivas

i) _____ $S \perp P$ (S ortogonal con P) si $\forall a \in S, \forall b \in P, \langle a, b \rangle = 0$.

Entonces los conjuntos

$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$ y $P = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / \frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = -\frac{z}{5}\}$ son ortogonales

j) _____ El sistema $3x - 2y + z = 1$; $x + y = 2z + 2$; $3x = -y - z$ tiene como solución un vector cuya longitud es $\sqrt{5}$

k) _____ La recta que es paralela a $\frac{x-1}{2} = 2 - y = \frac{-z+2}{3}$ y que pasa por el punto $(1, -1, 0)$, forma un ángulo agudo con el plano $2x + y - z = 3$

l) _____ Los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ son ortogonales.

2) Obtenga la fórmula de la distancia entre dos planos paralelos.

3) Dos rectas se dicen *alabeadas* si no se intersecan ni son paralelas.

Determine si las rectas $\frac{x+1}{-2} = \frac{2-3z}{4} = y-1$ y $x = 2+t, 2y = t+1, 3z = t+1$ son alabeadas.

4) Calcule la distancia desde el punto $(4, 2, -1)$ a la recta $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$

5) El producto escalar triple entre los vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ se define de la siguiente manera $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$$\text{Muestre que : } \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6) Sean L_1 y L_2 dos rectas alabeadas, con vectores directores correspondientes $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$. Además P_1 y P_2 puntos pertenecientes a las rectas L_1 y L_2 , respectivamente.

La fórmula de la distancia entre L_1 y L_2 está definida de la siguiente forma

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)|}{\|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\|}$$

Usando la fórmula anterior, calcule la distancia entre las rectas $-2-x = \frac{y+3}{-2} = z$ y $2x-1 = \frac{3+y}{2} = 3z$

7) Calcule la distancia entre los planos $x+y-4z=1$ y $x-y+2z=4$

8) Muestre que la distancia d del punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ al plano $Ax + By + Cz = D$ es $d = \frac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Utilice esta fórmula para calcular la distancia del punto $(1, -1, 3)$ al plano $x - y + 3z = 7$

9) Sean $P_1 = (1, 3, 2)$, $P_2(2, 1, 2)$ y $P_3 = (2, 0, 4)$

Calcular :

- a) El área del triángulo cuyos vértices son P_1 , P_2 y P_3
- b) Los ángulos interiores del triángulo
- c) Un vector perpendicular al triángulo

10) La proyección del vector $\mathbf{a}$ sobre el $\mathbf{b}$ está dada por $\text{proy}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{b}\|^2} \mathbf{b}$

Calcule la proyección del vector normal al plano $-2x + 3y = z - 1$, sobre el vector director de la recta $\frac{4-x}{2} = 1 - 4y = 3z - 1$

11) Considere la recta L_1 en $\mathbb{R}^3$ definida como: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{2}$

- a) Calcule la ecuación del plano que pasa por $P_1(1, 2, -1)$ y que es perpendicular a la recta L_1 .
- b) Calcule la ecuación de la recta L_2 que pasa por $P_1(1, 2, -1)$ y que es paralela a L_1 .
- c) Calcule la distancia entre las rectas L_1 y L_2 .
- d) Calcule la ecuación del plano que contiene a las rectas L_1 y L_2 .
- e) ¿Existe intersección entre estos dos planos? Argumente adecuadamente. Si es así, halle esta intersección.

12) Considere los puntos $P_1(1, -1, 0)$, $P_2(3, -1, 2)$ en $\mathbb{R}^3$

- a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P_1 y P_2 .
- b) Calcule la ecuación del plano que contiene a P_1 y que es perpendicular a la recta hallada en la parte a).
- c) Calcule la ecuación de una recta que esté contenida en el plano calculado en la parte b) y que pase por P_1 .
- d) Halle la ecuación de un plano que equidiste de P_1 y P_2 .

13) Considere la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ en el espacio:

- a) Analice y argumente si esta recta está contenida en el plano $x - y + 2z = 2$.
- b) ¿Existe intersección entre esta recta y el plano dado en a)?
- c) Calcule la distancia entre ellos.

14) Considere los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(-1, -3, 1)$, $P_3(4, 1, -1)$ en $\mathbb{R}^3$

- a) Calcule el área del triángulo cuyos vértices son P_1 , P_2 y P_3 .
- b) Calcule la ecuación del plano que contiene al triángulo anterior.
- c) Calcule la distancia entre la recta L y el plano calculado en la parte b),

donde , $L : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

15) Obtenga:

- a) La ecuación del plano que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ y $(1, 2, 0)$
- b) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, a, 1)$ y $(2, 1, a)$, con $a > 0$