UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

GP6 REGLA DE L'HOPITAL

Teoría

T 49 La regla de L'Hopital sirve para resolver algunas indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones derivables.

T 50 **Regla de L'Hopital.**
Supongamos que f y g son funciones derivables y que $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene a k para $x \neq k$. Supongamos además que

$\lim_{x \to k} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to k} g(x) = 0$
ó que
$\lim_{x \to k} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \to k} g(x) = \pm\infty$

Entonces $\displaystyle \lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

si el límite del lado derecho existe o es igual a $+\infty$ ó $-\infty$.

T 51 La regla de L'Hopital cubre las indeterminaciones de los tipos $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$ y $\frac{-\infty}{-\infty}$

La regla de L'Hopital también es válida para límites laterales o límites al infinito, es decir, $x \to k$ puede ser reemplazado en la regla de L'Hopital por $x \to k^-$, $x \to k^+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

T 52 Si al calcular $\displaystyle \lim_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ volvemos a obtener una indeterminación de alguno de los tipos manejados por la regla de L'Hopital podemos volver a aplicarla. Este proceso puede ser repetido todas las veces que sea necesario hasta que la indeterminación desaparezca.

T 53 Si se tiene una forma indeterminada del tipo $0 \cdot \infty$ ó $\infty \cdot 0$ ó $0 \cdot (-\infty)$ ó $-\infty \cdot 0$, debemos transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ para luego aplicar la regla de L'Hopital. En este caso debemos transformar el producto $f \cdot g$, que origina la indeterminación del tipo $0 \cdot \infty$ ó $\infty \cdot 0$ ó $0 \cdot (-\infty)$ ó $-\infty \cdot 0$, en un cuociente :

$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$ ó $f \cdot g = \frac{g}{1/f}$

$\boxed{\text{T}}$ **54** Si se tiene una forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$, debemos convertir la diferencia en un cuociente, por ejemplo, usando un denominador común o racionalizando o factorizando, de modo que logremos la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ que nos permita aplicar la regla de L'Hopital.

$\boxed{\text{T}}$ **55** Si se tiene el límite $\lim\limits_{x \to k} \left[f(x)\right]^{g(x)}$ aparecen varias formas indeterminadas :

$a)$ Si $\lim\limits_{x \to k} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to k} g(x) = 0$, entonces la indeterminación es del tipo 0^0

$b)$ Si $\lim\limits_{x \to k} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to k} g(x) = 0$, entonces la indeterminación es del tipo ∞^0

$c)$ Si $\lim\limits_{x \to k} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to k} g(x) = \pm\infty$, entonces la indeterminación es del tipo $1^{\pm\infty}$

Cada uno de estos tres casos puede ser tratado ya sea aplicando logaritmo natural

$$y = \left[f(x)\right]^{g(x)} \Rightarrow ln(y) = g(x) \cdot ln(f(x))$$

o escribiendo la función como una exponencial

$$\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{g(x) \cdot ln(f(x))}$$

Luego

$$\lim_{x \to k} \left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim_{x \to k} e^{g(x) \cdot ln(f(x))}$$

Pero sabemos que la función exponencial es continua, y para una función continua h se tiene que

$$\lim_{x \to k} h(x) = h(k) = h(\lim_{x \to k} x)$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to k} \left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim_{x \to k} e^{g(x) \cdot ln(f(x))} = e^{\lim\limits_{x \to k} g(x) \cdot ln(f(x))}$$