Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería Agrícola

PLANOS Y RECTAS EN EL ESPACIO.

Facultad de Ingeniería Agrícola
www.fiaudec.cl

Juan Carlos Sandoval Avendaño

Edición Enero 2020

ESPACIOS VECTORIALES $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

$\boxed{\text{T}}$ 1 **Vectores Paralelos**

Dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son paralelos si y sólo si es posible establecer la reclación $\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{b}$ o, de forma equivalente, $\boldsymbol{b} = \alpha\,\boldsymbol{a}$, con α un escalar.
Por ejemplo, los vectores $\boldsymbol{a} = [1, 2, 3]$ y $\boldsymbol{b} = [2, 4, 6]$ son paralelos pues $\boldsymbol{b} = 2\,\boldsymbol{a}$

$\boxed{\text{T}}$ 2 **Ángulo entre Vectores**

Sea α el menor ángulo entre los vectores no nulos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, de un espacio vectorial con producto interno. Entonces

$$cos(\alpha) = \frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>}{\|\,\boldsymbol{a}\,\|\,\|\,\boldsymbol{b}\,\|}$$

Ahora, si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, entonces es válida la relación

$$sen(\alpha) = \frac{\|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,\|}{\|\,\boldsymbol{a}\,\|\,\|\,\boldsymbol{b}\,\|}$$

$\boxed{\text{T}}$ 3 Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$, entonces

$i)$ $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}> \; = 0$ y $<\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}> \; = 0$, es decir, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ es perpendicular con $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$

$ii)$ $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son paralelos sí y sólo si $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \theta$

$\boxed{\text{T}}$ 4 Si los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos lados de un triángulo, entonces el área A de triángulo está dado por:

$$A = \frac{1}{2}\,\|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,\|$$

$\boxed{T}$ 5 Productos Escalar y Vectorial Triple

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

Los productos $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} >$ y $< \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} >$ se denominan producto escalar triple.
Los productos $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ y $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ se denominan producto vectorial triple.

$\boxed{T}$ 6 Propiedades de producto escalar y vectorial triple

Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$

$i)$ $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \, < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} > \boldsymbol{b} - \, < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > \boldsymbol{c}$

$ii)$ $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} > \; = \; < \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} >$

$iii)$ $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) = \, - \| \boldsymbol{a} \| \boldsymbol{c}$

$iv)$ La expresión $| < \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} > |$ representa el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$

$\boxed{T}$ 7 Proyeccción de un vector sobre otro

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ vectores no nulos. Se denomina proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre $\boldsymbol{a}$ al vector

$$proy_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = \frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>}{\| \boldsymbol{a} \|^2} \boldsymbol{a}$$

EJERCICIOS
ESPACIOS VECTORIALES $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

[1] Muestre que si $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\|\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}\|^2 + <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>^2 = 1$$

[2] Muestre que si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son dos vectores no nulos linealmente dependientes, entonces la proyección de $\boldsymbol{v}$ sobre $\boldsymbol{u}$ es $\boldsymbol{v}$.

[3] Obtenga un vector en $\mathbb{R}^3$ que sea unitario y además perpendicular a $[1, -1, 3]$.

[4] Determine los ángulos interiores del triángulo formado por los puntos $(-3, 5, 6)$, $(-2, 7, 9)$ y $(2, 1, 7)$

[5] Sean $P_1 = (1, 3, 2)$, $P_2 = (2, 1, 2)$ y $P_3 = (2, 0, 4)$
Calcular :
$a)$ El área del triángulo cuyos vértices son P_1, P_2 y P_3
$b)$ Los ángulos interiores del triángulo.
$c)$ Un vector perpendicular al triángulo.

Solución:

$a)$ Obtengamos dos vectores que representen a dos lados del triángulo.
$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = [2-1, 1-3, 2-2] = [1, -2, 0]$
$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{P_2P_3} = [2-2, 0-1, 4-2] = [0, -1, 2]$

$$Area = \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\,\|[-4,\ -2,\ -1]\| =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16+4+1} = \frac{1}{2}\sqrt{21}\ \square$$

$b)$ Falta obtener el vector que representa al tercer lado.

$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{P_1P_3} = [2-1, 0-3, 4-2] = [1,\ -3, 2]$

El ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es :

$$\alpha = Arccos\left(\frac{<\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}>}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right) = Arccos\left(\frac{<[1,-2,0]\ ,\ [0,-1,2]>}{\|[1,-2,0]\|\|[0,-1,2]\|}\right) =$$
$$Arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{5}}\right) = Arccos\left(\frac{2}{5}\right) = 66.42^\circ$$

El ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es :

$$\beta = Arccos\left(\frac{<\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{c}>}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|}\right) = Arccos\left(\frac{<[1,-2,0]\ ,\ [1,-3,2]>}{\|[1,-2,0]\|\|[1,-3,2]\|}\right) =$$
$$Arccos\left(\frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{14}}\right) = Arccos\left(\frac{7}{\sqrt{70}}\right) = 33.21^\circ$$

El ángulo entre $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ es :

$$\gamma = Arccos\left(\frac{<\boldsymbol{b}\ ,\ \boldsymbol{c}>}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|}\right) = Arccos\left(\frac{<[0,-1,2]\ ,\ [1,-3,2]>}{\|[0,-1,2]\|\|[1,-3,2]\|}\right) =$$
$$Arccos\left(\frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{14}}\right) = Arccos\left(\frac{7}{\sqrt{70}}\right) = 33.21^\circ$$

Notamos que el triángulo es isósceles y como las fórmulas anteriores nos dan el menor ángulo entre los vectores considerados,concluimos que los ángulos interiores son :

$\alpha* = 180° - \alpha = 180° - 66.42^\circ = 113.58°$
$\beta = 33.21^\circ$
$\gamma = 33.21^\circ\ \square$

$c)$ Un vector perpendicular $\boldsymbol{n}$ al triángulo es el producto cruz de dos vectores que representen dos lados, es decir, por ejemplo :

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = [-4,\ -2,\ -1]\ \square$$

[6] Obtenga el ángulo, en grados, entre los vectores $[1,\ -1]$ y $[2,4]$

Solución:

$$cos(\alpha) = \frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{<[1,-1],[2,4]>}{\|[1,-1]\|\,\|[2,4]\|} = \frac{2-4}{\sqrt{2}\,\sqrt{20}} = \frac{-2}{\sqrt{40}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$\alpha = Arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right) \approx 108^\circ\, 26'\, 5.82'' = 108.4349488 \ \square$$

[7] Calcule el vector proyección de $[1,-2,0]$ sobre $[1,-2,0]\times[2,-1,0]$

(Ind.: El vector proyeccción de $\boldsymbol{a}$ sobre $\boldsymbol{b}$ es $\frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b}$)

Solución:

Calculemos en primer lugar $[1,-2,0]\times[2,-1,0]$

$$[1,-2,0]\times[2,-1,0] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [0,0,3]$$

$$Vector\ Proy = \frac{<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} = \frac{<[1,-2,0],[0,0,3]>}{\|[0,0,3]\|^2}[0,0,3] = \frac{0}{9}[0,0,3] = [0,0,0] \ \square$$

[8] Determine si el vector proyección de $[-1,-2,0]$ sobre $[1,-2,0]\times[1,-1,1]$, es paralelo al vector $[2,-2,2]$

[9] Sean $P_1 = (1,3,2)$, $P_2(2,1,2)$ y $P_3 = (2,0,4)$. Muestre que un vector perpendicular al triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3 es paralelo a $[4,2,1]$

Solución:

$\boldsymbol{a} = P_3 - P_1 = [1,-3,2]$
$\boldsymbol{b} = P_2 - P_1 = [1,-2,0]$

Un vector perpendicular al triángulo es el vector normal

$$\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [4,2,1]$$

que es claramente paralelo al vector $[4,2,1]$, porque es el mismo vector. $\square$

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

T 8 Rectas en el Espacio

Consideremos una recta L que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela a un vector conocido, no nulo, $\boldsymbol{r} = [a, b, c]$ llamado vector director. Si $P = (x, y, z)$ representa un punto cualquiera de la recta L, entonces el vector $\overrightarrow{PP_0}$ es paralelo al vector $\boldsymbol{r}$, es decir,

$$\overrightarrow{PP_0} = t\,\boldsymbol{r}, \text{ con } t \in \mathbb{R} \qquad \text{(Ecuación Vectorial)}$$

o

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t\,[a, b, c]$$

o bien

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t\,a \\ y - y_0 &= t\,b, \text{ con } t \in \mathbb{R} \\ z - z_0 &= t\,c \end{aligned} \qquad \text{(Ecuaciones Paramétricas)}$$

Si a, b y c son distintas de cero, entonces podemos despejar el parámetro t en cada una de las ecuaciones paramétricas anteriores y obtener:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \text{ (Ecuaciones simétricas o cartesianas)}$$

T 9 Rectas Paralelas, Perpendiculares y Alabeadas

Sean L_1 y L_2 dos rectas con vectores directores correspondientes $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$

$a)$ L_1 es paralela a L_2 si $\boldsymbol{r}_1$ es paralelo a $\boldsymbol{r}_2$

$b)$ L_1 es perpendicular a L_2 si $\boldsymbol{r}_1$ es perpendicular a $\boldsymbol{r}_2$ y además $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

$c)$ El par de rectas se dicen alabeadas si no se intersecan ni son paralelas.

$\boxed{\text{T}}$ 10 Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$

Sea L una recta con vector director r y sea A un punto del espacio que no pertenece a la recta L. La distancia de A a L está dada por:

$$d(A, L) = \frac{\left\| \boldsymbol{r} \times \overrightarrow{AP_0} \right\|}{\| \boldsymbol{r} \|}$$

donde P_0 es un punto cualquiera de la recta.

$\boxed{\text{T}}$ 11 Planos en el Espacio

Consideremos un plano π que contiene el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que es perpendicular a un vector conocido, no nulo, $\boldsymbol{n} = [a, b, c]$ llamado vector normal. Si $P = (x, y, z)$ representa un punto cualquiera del plano π, entonces el vector $\overrightarrow{PP_0}$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{n}$, es decir,

$$< \overrightarrow{PP_0}, n > \ = 0 \qquad \text{(Ecuación Vectorial)}$$

Es decir, $< [x - x_0, y - y_0, z - z_0], [a, b, c] > \ = 0$

O bien $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

Que es equivalente con $ax + by + cz = d$ (Ecuación Cartesiana)

$\boxed{\text{T}}$ 12 Distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$

La distancia de un punto A a un plano π, cuyo vector normal es $\boldsymbol{n}$, está dada por :

$$d(A,\pi) = \frac{|<\boldsymbol{n},\overline{AP_0}>|}{\|\,\boldsymbol{n}\,\|}$$

donde P_0 es un punto cualquiera del plano

EJERCICIOS
RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

[1] Obtenga la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{2} = 2 - y = \frac{-z-3}{-4}$ y pasa por el punto $(-1, 3, 4)$

[2] Determine la ecuación de la recta que pasa a través del punto $(1, 0, -1)$ y es paralela a la recta $x = 1 - 2t\,,\ y = 3t\,,\ z = 5 + 3t$

Solución:

Sea L la recta que pasa a través del punto $(1, 0, -1)$ y es paralela a la recta $x = 1 - 2t\,,\ y = 3t\,,\ z = 5 + 3t$
Sea $\boldsymbol{r} = (a, b, c)$ el vector director de L.
Recordemos que dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos, es decir, $[a, b, c] = \alpha\,[-2, 3, 3] \Rightarrow a = -2\alpha\,,\ b = 3\alpha\,,\ c = 3\alpha$

Por lo tanto, dado que la recta buscada pasa por el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$ las ecuaciones simétricas serán :

$$\frac{x-1}{-2\alpha} = \frac{y-0}{3\alpha} = \frac{z+1}{3\alpha} \Rightarrow^{\alpha \neq 0} \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$$

y las paramétricas

$$x = -2t + 1,\ y = 3t\,,\ z = -1 + 3t \quad \square$$

[3] Muestre que si un plano cruza los ejes coordenados en los puntos no nulos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, entonces su ecuación es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Solución:

Obtengamos dos vectores $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ que estén en el plano.

$\boldsymbol{v}_1 = (0, b, 0) - (a, 0, 0) = [-a, b, 0]$

$\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, c) - (a, 0, 0) = [-a, 0, c]$

El vector normal estará dado por el producto cruz (recuerde que el producto cruz es un nuevo vector, ortogonal a los vectores que lo originaron).

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = bc\,\boldsymbol{i} + ab\boldsymbol{k} + ac\,\boldsymbol{j} = [bc, ac, ab]$$

Por lo tanto, el plano buscado, tomando el punto $(a, 0, 0)$, tiene ecuación :

$bc\,(x-a) + acy + abz = 0 \Rightarrow bcx - abc + acy + abz = 0 \Rightarrow$

$bcx + acy + abz = abc \Rightarrow^{/abc} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ❑

[4] Verifique si las rectas $L_1 : x = 1 + t\,,\ y = -2 + 3t\,,\ z = 4 - t$ y $L_2 : x = 2s\,,\ y = 3 + s\,,\ z = -3 + 4s$ son paralelas.

[5] Obtenga la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(2, 0, -1)$ y $(1, 2, 0)$

[6] Determine, si existe, el punto de intersección entre el plano $\pi : x + 3y - z = 2$ y la recta $L : \begin{cases} 2x - y + 2z = -1 \\ 2x + y = 3z - 2 \end{cases}$

Solución:

Obtengamos la recta L.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -1 \\ 2x + y = 3z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(-1)+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Fijemos $z = t$
$2y - 5t = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}t$

$2x - y + 2t = -1 \Rightarrow x = \frac{-1+y-2t}{2} \Rightarrow x = \frac{-1+\frac{5}{2}t-2t}{2} \Rightarrow x = \frac{-1+\frac{1}{2}t}{2} \Rightarrow$

$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t$

Reemplazando las variables anteriores en la ecuación del plano $x + 3y - z = 2$, se tiene

$x + 3y - z = 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t + \frac{15}{2}t - t = 2 \Rightarrow \frac{29}{4}t = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \frac{10}{29}$

Reemplazando el valor del parámetro recién obtenido en las ecuaciones paramétricas tenemos que el punto de intersección tiene componentes $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t, \frac{5}{2}t, t) = \left(-\frac{12}{29}, \frac{25}{29}, \frac{10}{29}\right)$ ❑

[7] Obtenga la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$, y que además pasa por el punto $(-1, 2, 1)$

[8] Muestre que las rectas $L_1 : x = 1 + t\,, y = -2 + 3t\,, z = 4 - t$ y $L_2 : x = 2s\,, y = 3 + s\,, z = -3 + 4s$ no se intersecan ni son paralelas.

[9] Calcule la distancia del punto $(1, 1, 1)$ al plano $6x + 2y + z = 4$

[10] Calcule el ángulo que forman el plano que pasa por los puntos $(1, -1, 2)$, $(0, 1, 3)$ y $(1, 1, 1)$, y el plano $x - y + z = 1$

Solución:

Sean $A = (1, -1, 2)$, $B = (0, 1, 3)$ y $C = (1, 1, 1)$

Así

$\boldsymbol{a} = [B - A] = [-1, 2, 1]$

$\boldsymbol{b} = [C - A] = [0, 2, -1]$

son vectores que están en el primer plano mencionado.

Luego

$$\boldsymbol{n_1} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = [-4, -1, -2]$$

El vector normal del primer plano es $\boldsymbol{n_1} = [-4, -1, -2]$ y el del segundo plano es $\boldsymbol{n_2} = [1, -1, 1]$

El ángulo entre dos planos es el menor ángulo que los vectores normales forman; sea α este ángulo.

$$\alpha = Arccos\left(\frac{<[-4,-1,-2],[1,-1,1]>}{\|[-4,-1,-2]\| \, \|[1,-1,1]\|}\right) \Rightarrow \alpha = Arccos\left(\frac{-4+1-2}{\sqrt{16+1+4}\,\sqrt{1+1+1}}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha = Arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{21}\,\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \alpha = Arccos\left(\frac{-5}{\sqrt{63}}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha \approx 180^\circ - 129^\circ 2' \, 44.71'' = 50^\circ 57' \, 15.29'' \quad \square$$

[11] Determine la veracidad de la siguiente afirmación:

El punto de intersección entre el plano $\pi: x + y - z = 2$ y la recta $L: \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2x + y = 3z - 2 \end{cases}$, es tal que la distancia al punto $(-3, 2, 1)$ es mayor que $\sqrt{2}$

[12] Muestre que el vector director de la recta que es paralela a $\frac{x-1}{3} = 1 - y = \frac{-4z+2}{2}$ y que pasa por el punto $(1, -1, 0)$, es $\left[3, -1, -\frac{1}{2}\right]$

[13] Determine el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus aristas

[14] Verifique si $B = \left\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ si $\mathbf{a}$ es el vector director de $\frac{2x-1}{4} = 1 - y = \frac{1-3z}{3}$, $\mathbf{b}$ el vector normal de $3x - y + z = 4y + 2z - 1$ y $\mathbf{c} = \|2\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \, proy_{\mathbf{b}} \, \mathbf{a}$

[15] Determine si el ángulo entre los planos $3x-2y+z=1$ y $x-y=4$ es menor que el ángulo entre el vector director de la recta $2x-4=t$; $z=4-2t$; $2-y=5t$, y el vector $[-2,1,0]$

Solución:

El ángulo entre dos planos será el ángulo entre sus vectores normales. Para la recta $3x-2y+z=1$ el vector normal es $\boldsymbol{n_1}=[3,-2,1]$ y para la recta $x-y=4$ es $\boldsymbol{n_2}=[1,-1,0]$

Luego

$$\text{ángulo}(\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}) = Arccos\left(\frac{<[3,-2,1],[1,-1,0]>}{\|[3,-2,1]\|\,\|[1,-1,0]\|}\right)$$
$$= Arccos\left(\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{2}}\right) \approx 19.1°$$

Obtengamos el vector director de la recta $2x-4=t$; $z=4-2t$; $2-y=5t$

$x=\frac{t+4}{2}$; $y=2-5t$; $z=4-2t$

Luego

$$\boldsymbol{r}=[\tfrac{1}{2},\ -5,\ -2]$$

Así

$$\text{ángulo}([\tfrac{1}{2},\ -5,\ -2],[-2,1,0]) = Arccos\left(\frac{<[\frac{1}{2},-5,-2],[-2,1,0]>}{\left\|[\frac{1}{2},-5,-2]\right\|\,\|[-2,1,0]\|}\right)$$
$$= Arccos\left(\frac{-6}{\frac{\sqrt{117}}{2}\sqrt{5}}\right) \approx 119.7°$$

Finalmente,

$\text{ángulo}(\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}) \approx 19.1° < \text{ángulo}([\frac{1}{2},\ -5,\ -2],[-2,1,0]) \approx 119.7°$ ❑