

**GP4**

**MÁXIMOS Y MÍNIMOS**

**Teoría**

**T** 33 Una función  $f$  posee un *máximo absoluto en  $k$*  si  $f(k) \geq f(x)$  para todo  $x$  en un intervalo  $I \subseteq \text{Dom}(f)$ , donde  $\text{Dom}(f)$  es el dominio de la función  $f$ .

El número  $f(k)$  es llamado el valor máximo de  $f$  en  $I$ .

Una función  $f$  posee un *mínimo absoluto en  $k$*  si  $f(k) \leq f(x)$  para todo  $x$  en un intervalo  $I \subseteq \text{Dom}(f)$ , donde  $\text{Dom}(f)$  es el dominio de la función  $f$ .

El número  $f(k)$  es llamado el valor mínimo de  $f$  en  $I$ .

Los valores máximo y mínimo de  $f$  son llamados *valores extremos de  $f$* .

**T** 34 Una función  $f$  posee un *máximo local o máximo relativo en  $k$*  si existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $k$  tal que  $f(k) \geq f(x)$  para todo  $x$  en  $I$ .

Una función  $f$  posee un *mínimo local o mínimo relativo en  $k$*  si existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $k$  tal que  $f(k) \leq f(x)$  para todo  $x$  en  $I$ .

**T** 35 **Teorema del valor extremo.**

Si  $f$  es continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces  $f$  posee un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto en  $[a, b]$ .

**T** 36 Para obtener los valores extremos de una función continua  $f$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , cuya existencia garantiza el teorema del valor extremo, se debe proceder de la siguiente manera :

a) Calcule  $f'(x)$

b) Determine todos los *valores críticos de  $f$  en  $[a, b]$* , es decir, encontrar los valores  $k$  tales que  $f'(k) = 0$  ó  $f'(k)$  no existe.

c) Liste los valores críticos de  $f$  y los extremos del intervalo  $[a, b]$

$$a, k_1, k_2, \dots, k_n, b$$

c) Calcule los valores de la función  $f$  en los valores listados en c) :

$$f(a), f(k_1), f(k_2), \dots, f(k_n), f(b)$$

El mayor de estos valores es el máximo absoluto de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  y el menor de estos valores es el mínimo absoluto de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ .

**T 37** Una función  $f$  es *creciente en un intervalo  $I$* , si para cada  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$  tales que  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Una función  $f$  es *decreciente en un intervalo  $I$* , si para cada  $x_1$  y  $x_2$  en  $I$  tales que  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) > f(x_2)$ .

La función  $f$  es llamada *monótona en  $I$*  si es creciente o decreciente en  $I$ .

**T 38** Supongamos que  $f$  es continua en  $[a, b]$  y que es derivable en  $(a, b)$ .

a) Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es creciente en  $[a, b]$

b) Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es decreciente en  $[a, b]$

**T 39 Test de la primera derivada para extremos relativos.**

Para cualquier función continua en el intervalo  $[a, b]$  y que posee exactamente un valor crítico  $k$  en el intervalo abierto  $(a, b)$  se tiene que :

a)  $f$  posee un mínimo relativo en  $k$  si  $f'(x) < 0$  en  $(a, k)$  y  $f'(x) > 0$  en  $(k, b)$ . Es decir,  $f$  posee un mínimo relativo o local en  $k$  si  $f$  es decreciente a la izquierda de  $k$  y creciente a la derecha de  $k$ .

b)  $f$  posee un máximo relativo en  $k$  si  $f'(x) > 0$  en  $(a, k)$  y  $f'(x) < 0$  en  $(k, b)$ . Es decir,  $f$  posee un máximo relativo o local en  $k$  si  $f$  es creciente a la izquierda de  $k$  y decreciente a la derecha de  $k$ .

**T 40** Supongamos que  $f$  es una función cuya primera derivada  $f'$  existe en cada punto de un intervalo abierto  $I$ . Entonces

a)  $f$  es cóncava hacia arriba en el intervalo  $I$  si  $f'$  es creciente en  $I$ . Es decir, si  $f''(x) > 0$  para todo  $x$  en  $I$ , entonces  $f$  es cóncava hacia arriba en  $I$ .

b)  $f$  es cóncava hacia abajo en el intervalo  $I$  si  $f'$  es decreciente en  $I$ . Es decir, si  $f''(x) < 0$  para todo  $x$  en  $I$ , entonces  $f$  es cóncava hacia abajo en  $I$ .

**T 41** Un punto  $P$  en una curva es llamado *punto de inflexión* si la curva cambia de concavidad en  $P$ .

Si una función  $f$  posee un punto de inflexión éste ocurre en un valor  $k$  donde

$$f''(k) = 0 \quad \text{ó} \quad f''(k) \text{ no existe.}$$

**T 42 Test de la segunda derivada para extremos relativos o locales.**

Supongamos que  $f$  es una función para la cual  $f'(x)$  existe para cada  $x$  en un intervalo abierto  $(a, b)$  contenido en su dominio, y que existe un valor crítico  $k$  para el cual  $f'(k) = 0$ . Entonces :

a) Si  $f''(k) > 0$ , entonces  $f$  posee un mínimo local en  $k$ .

b) Si  $f''(k) < 0$ , entonces  $f$  posee un máximo local en  $k$ .

El test falla si  $f''(k) = 0$ ; en tal caso debería usarse el test de la primera derivada.

**T 43 Asíntotas.**

a) La recta  $x = k$  es una *asíntota vertical de la curva de ecuación*  $y = f(x)$  si se cumple alguno de los siguientes resultados :

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = -\infty \quad \text{ó}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = -\infty$$

b) La recta  $y = k$  es una *asíntota horizontal de la curva de ecuación*  $y = f(x)$  si existe alguno de los siguientes límites :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

c) La recta  $y = mx + b$  es una *asíntota oblicua de la curva de ecuación*  $y = f(x)$  si existen los límites :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

y

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

#### **▮ 44 Graficación de funciones.**

La estrategia para graficar funciones considera una sucesión de pasos :

a) **Interceptos.** Calcule las intersecciones de la curva de ecuación  $y = f(x)$  con los ejes horizontal y vertical.

Para calcular las intersecciones con el eje horizontal haga  $y = 0$ , es decir, resuelva la ecuación  $f(x) = 0$ .

Para calcular las intersecciones con el eje vertical haga  $x = 0$ , es decir, resuelva la ecuación  $f(0) = y$ .

b) **Asíntotas.** Obtenga las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

c) **Derivadas.** Calcule  $f'(x)$  y  $f''(x)$ .

d) **Valores indefinidos y críticos de  $f$ .** Obtenga los valores para los cuales la función  $f$  no está definida (habitualmente valores que hacen cero el denominador de una función racional). Obtenga los valores críticos de  $f$ .

e) **Intervalos de crecimiento y decrecimiento.** Use los valores obtenidos en d) para determinar intervalos en los cuales la función  $f$  es creciente o decreciente.

f) **Extremos relativos.** Use la información obtenida en e) y/o la segunda derivada para determinar máximos y/o mínimos relativos.

Recuerde que un extremo relativo puede darse sólo en un valor  $k$  para el cual  $f(k)$  exista.

g) **Puntos de inflexión.** Determine candidatos a valores de inflexión buscando valores  $k$  donde  $f''(k)$  no existe o donde  $f''(k) = 0$ . Si  $f(k)$  no existe, entonces la función  $f$  no posee un punto de inflexión en  $k$ .

h) **Intervalos de concavidad.** Use los valores obtenidos en g) para determinar los intervalos donde la función  $f$  es cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba.

*i)* **Graficación.** Grafique la función  $f$  usando toda la información anterior, incorporando, si es necesario, un grupo de puntos adicionales obtenidos usando la calculadora.

**T 45 Una estrategia para resolver problemas de optimización (máximo - mínimo).**

*i)* Lea el problema cuidadosamente, y si es relevante bosqueje la situación planteada.

*ii)* Asigne letras o nombres apropiados a las variables, y si es necesario también a las constantes.

*iii)* Traduzca el problema a una ecuación en donde aparezca la cantidad que queremos maximizar o minimizar.

*iv)* Usando la información del problema exprese la cantidad que se quiere optimizar (maximizar o minimizar) en términos de una sola variable. Determine el dominio de la función recién definida.

*v)* Use los procedimientos anteriores para calcular el valor máximo o mínimo y en qué punto ocurre.