UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

LISTADO DE EJERCICIOS Nº 3
MÉTODOS NUMÉRICOS - CÁLCULO NUMÉRICO

1.- Sea la función $f : [\, a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, y considérense los puntos $x_0 = a,\ x_1 = \frac{a+b}{2},$ $x_2 = b.$ Determinar la fórmula de integración general $\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=0}^{2} A_i\, f(x_i)$ utilizando como conjunto básico

$$B = \left\{1,\ sen\left[\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_0}\right)\pi\right],\ cos\left[\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_0}\right)\pi\right]\right\}$$

Aplicar la fórmula obtenida para calcular $I = \int_0^2 \frac{1}{1+\ cos(x)}\, dx$

***Respuesta* :**

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \approx h\,(1 - \tfrac{2}{\pi})f(x_0) + \tfrac{4h}{\pi} f(x_1) + h\,(1 - \tfrac{2}{\pi})f(x_2)$$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+\ cos(x)}\, dx \approx\ 1.630689677\ \square$$

2.- Una partícula de masa m que se mueve a través de un fluido está sometida a una resistencia R debido a la viscocidad, la cual es función de la velocidad $v.$ La relación entre resistencia $R,$ velocidad v y tiempo t está dada por:

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\, du$$

Suponga que $R(v) = -v\sqrt{v}$ para un determinado fluido, donde R está dado en Newtons y v en metros/seg. Si $m = 10\, kg.$ y $v = 10\, m/s,$ calcular el tiempo que se requiere para que la partícula disminuya su velocidad a $5\, m/s,$ usando un método apropiado con un paso igual a $1.$
Obs.: Hacer los cálculos redondeando al 5° decimal

***Respuesta* :**

$$t = 2.638\, seg\ \square$$

3.- Escriba un programa en C que muestre por pantalla una raíz de la función $f(x) = e^x\, sen(x) - 1$ usando el método de Newton-Raphson y suponiendo que el usuario ingresa la aproximación inicial y el error.

4.- Los polinomios de Legendre se pueden generar recursivamente mediante: $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$ y $P_{n+2}(x) = \frac{2n+3}{n+2}\, x\, P_{n+1}(x) \; - \; \frac{n+1}{n+2}\, P_n(x), \quad n \geq \; 0$

Calcule la integral $\int_0^1 - x^6\, log(x)\, dx$ usando el método de integración de Gauss-Legendre con $n = 3$.
Considere que $w_1 = w_3 = 0.555556$ y $w_2 = 0.888889$, y además $x_1 \; > x_2 \; > x_3$.

Indicación: La fórmula de Gauss-Legendre es $\int_{-1}^1 f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)$

donde los nodos o abscisas x_i , $i = 1, 2..., n$ son las raíces del polinomio de Legendre $P_n(x)$, y los pesos w_i son dados en este caso.

Respuesta :

$\int_0^1 - x^6\, log(x)\, dx \approx 0.009130$ ❑

5.- Sean $x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \; \in [\, a \,,\, b\,]$ tales que

$$x_{j+1} - x_j = h \; = \frac{x_4 - x_0}{4} \;,\; j = 0, 1, 2, 3$$

Entonces se tiene la fórmula

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\, dx \; = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\, dx - \int_{x_1}^{x_3} f(x)\, dx$$

$a)$ Aplicar las fórmulas de Simpson y de Newton-Cotes de tercer orden, según corresponda, y demuestre que:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\, dx \; \approx \frac{h}{24} \left[9\, f(x_0) + 28\, f(x_1) + 22\, f(x_2) + 28\, f(x_3) + 9\, f(x_4) \right]$$

$b)$ Utilizar la relación anterior para deducir una fórmula que permita calcular integrales del tipo

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\, dx$$

donde $x_{j+1} - x_j = h = \frac{x_n - x_0}{n}$, $j = 0, 1, 2, \, ... \,, \, n - 1$, y n es múltiplo de $4.$

$c)$ Usar la fórmula deducida en $b)$ para obtener un valor aproximado de

$I = \int_1^3 ln(x)\, dx$, con $n = 8$. Use 4 decimales, correctamente redondeados, en todos sus cálculos.

***Respuesta* :**
$\int_1^3 ln(x)\, dx \approx 1.2957$ ❑

6.- Use el método de Halley para obtener la raíz negativa de la ecuación $x^3 + 5 = 3\,x^2 + 3\,x$ con un error menor que 10^{-1}

***Respuesta* :**
La solución aproximada final es $x_2 = -1.44949$ ❑

7.- Escriba una programa en C que calcule, usando la fórmula de Newton-Cotes de orden 3, la integral $\int_0^{\pi} cos(2x)\, sen(x)\, e^x\, dx$ con $n = 18$.
Muestre el resultado por pantalla con 6 decimales.

8.- La integral de una función f en un intervalo $[a, b]$ se puede aproximar por la integral de un polinomio de interpolación de f.
Para evaluar la integral de probabilidades $P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1.2} e^{-t^2}\, dt$

se dispone, para la función $f(t) = e^{-t^2}$ de la siguiente tabla de valores:

t_i	0.0	0.3	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(t_i)$	1.000	0.914	0.852	0.698	0.527	0.368	0.237

a) Calcular P por medio de polinomios de interpolación, de modo que se utilicen sólo polinomios de segundo grado. Considerar una subdivisión adecuada del intervalo de integración.
b) Si se designa por $P(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-t^2}\, dt$, calcular utilizando los resultados obtenidos en a), los valores de $P(0.0)$, $P(0.4)$, $P(0.8)$, $P(1.2)$ y construir con dichos valores un polinomio de newton progresivo. Con tal polinomio, calcular $P(0.52)$.

9.- Resuelva la ecuación $e^{-x} = x$ usando el método de la bisección con un error menor que 0.1

10.- Elija el método que Ud. considere apropiado para obtener la raíz negativa de la ecuación $x^3 + 5 = 3\,x^2 + 3\,x$ con un error menor que 10^{-3}