UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

LISTADO DE EJERCICIOS Nº 2
CÁLCULO NUMÉRICO
PLEV 2005-2006

1.- Resolver la ecuación:

$$e^x = \frac{1}{sen\, x}$$

con un error de 10^{-4} y con aproximación inicial 0.7454, usando el método de primer orden y el método de Newton-Raphson.
Compare los resultados obtenidos, ¿qué concluye?.

2.- Realice una iteración del método de Newton-Raphson para resolver el sistema:

$$10^{-6} = \frac{[H_2S]\,[S^{=}]}{[HS^{-}]}$$

$$10^{-7} = \frac{[H_2S]\,[OH^{-}]}{[HS^{-}]}$$

$$[HS^{-}]_i = [HS^{-}] + [H_2S] + [S^{=}]$$

$$[Na^{+}] + [H^{+}] = [HS^{-}] + 2\,[S^{=}] + [OH^{-}]$$

$$[H^{+}]\,[OH^{-}] = 10^{-14}$$

donde $[Na^{+}] = [HS^{-}]_i = c_i$, que es la concentración inicial.
Considere $c_i = 0.1$, y un vector inicial conveniente justificando su elección.

3.- Obtenga la fórmula aproximada de Newton-Cotes de tercer orden, considerando $(n+1)$ puntos, para n subdivisiones sobre $[a, b]$, con n múltiplo de 3.
Utilícela para calcular el valor aproximado de π, con $n = 6$.

4.- Sean $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in [\,a\,,\,b\,]$ tales que

$$x_{j+1} - x_j = h = \frac{x_4 - x_0}{4}\ ,\ j = 0, 1, 2, 3$$

Entonces se tiene la fórmula

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx$$

$a)$ Aplicar las fórmulas de Simpson y de Newton-Cotes de tercer orden, según corresponda, y demuestre que:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{h}{24}\left[9\,f(x_0) + 28\,f(x_1) + 22\,f(x_2) + 28\,f(x_3) + 9\,f(x_4)\right]$$

$b)$ Utilizar la relación anterior para deducir una fórmula que permita calcular integrales del tipo

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

donde $x_{j+1} - x_j = h = \frac{x_n - x_0}{n}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, y n es múltiplo de 4.

$c)$ Usar la fórmula deducida en $b)$ para obtener un valor aproximado de $I = \int_1^3 ln(x)\,dx$, con $n = 20$.

Obs.: Recuerde que la fórmula de Newton-Cotes de tercer orden es:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3\,f(x_1) + 3\,f(x_2) + f(x_3)\right]$$

5.- Obtenga una aproximación de $\int_0^3 f(x)\,dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , 0 \le x \le 1 \\ x^{-1} + 1 & , 1 < x \le 3 \end{cases}$$

con $n = 6$.

6.- Experimentalmente se conocen los siguientes valores de una función f

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	0.707	0.705	0.696	0.672	0.631	0.570	0.518

Calcular mediante el método de Simpson, la abscisa $\vec{x}$ del centro de masa de la región plana comprendida entre el eje Y, el eje X, la recta $x = 1.2$ y la gráfica de la función f considerando la densidad constante.
(**Indicación:** Para una región determinada por el eje X, las rectas $x = a$; $x = b$, y la gráfica de f, la abscisa del centro de masa está dada por

$$\vec{x} = \frac{\int_a^b x\,f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}\ )$$

7.- Los polinomios de Legendre se pueden generar recursivamente mediante:

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$ y
$P_{n+2}(x) = \frac{2n+3}{n+2}\, x\, P_{n+1}(x) \; - \; \frac{n+1}{n+2}\, P_n(x), \quad n \geq 0$

$a)$ Determine los polinomios P_2 , P_3 y P_4.
$b)$ Utilizando el método más apropiado calcule los ceros de P_3 con un error $\epsilon = 10^{-3}$
$c)$ El método de integración de Gauss-Legendre consiste en aproximar el valor de la integral de una función en el intervalo $[\,-1, 1\,]$ por lo siguiente:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)$$

donde n puede tomar los valores $1, 2, 3, ...$; w_i son datos numéricos conocidos y x_i son las raíces del polinomio de Legendre P_n.
Calcule la integral $\int_0^1 -x^6\, log(x)\, dx$ usando el método de integración de Gauss-Legendre con $n = 3$.
Considere que $w_1 = w_3 = 0.555556$ y $w_2 = 0.888889$, y además $x_1 > x_2 > x_3$.

8.- Resuelva la ecuación $z^2 = 1$ con $z \in \mathbb{C}$ a partir de la condición inicial $(0.21, 0.54)$.

9.- Determine una aproximación del área de la región acotada por la curva normal

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x/\sigma)^2}{2}}$$

y el eje x en el intervalo [$-\sigma$,σ], $\sigma > 0$. Considere $n = 9$.

10.- Resuelva la ecuación $e^{-x} = x$ usando el método de la bisección con un error menor que 0.1

11.- Una partícula de masa m que se mueve a través de un fluido está sometida a una resistencia R debido a la viscocidad, la cual es función de la velocidad v. La relación entre resistencia R, velocidad v y tiempo t está dada por:

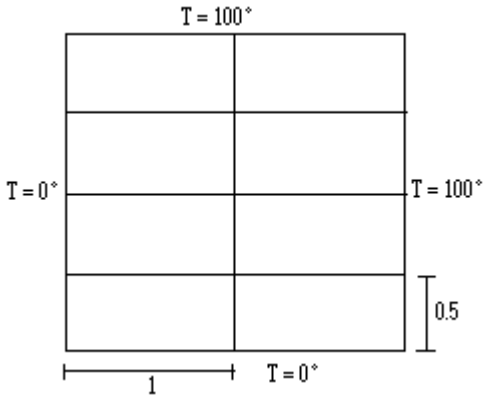
$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}\, du$$

Suponga que $R(v) = -v\sqrt{v}$ para un determinado fluido, donde R está dado en Newtons y v en metros/seg.. Si $m = 10\, kg.$ y $v = 10\, m/s$, calcular el tiempo que se requiere para que la partícula disminuya su velocidad a $5\, m/s$, usando un método apropiado con un paso igual a 1.
Obs.: Hacer los cálculos redondeando al 5° decimal.

12.- La distribución de temperatura en estado estacionario bidimensional se define por medio de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

en donde T es la temperatura y, x y y son las coordenadas.
Obtenga la distribución de la temperatura dentro de la placa plana que se muestra en la siguiente figura:



13.- ¿ El método de Heun ofrece una mejor aproximación que el método del punto medio para el PVI

$$y' = -y + t + 1,\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1$$

cualquiera sea el h ?. Justifique su respuesta.

14.- Sea la ecuación de Laplace en el rectángulo $[0, 2] \times [1, 2]$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

con condición de frontera $u = x\,y$.
Considere $h = \frac{1}{2}$.
Resuelva el problema anterior.

15.- Obtenga una solución aproximada para la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2;$$

$$u(x,0) = x^2\,,\ u(x,2) = (x-2)^2,\ 0 \le x \le 1,$$
$$u(0,y) = y^2\,,\ u(1,y) = (y-1)^2,\ 0 \le y \le 2.$$

Use $h = k = 0.5$. Compare los resultados con la solución exacta $u(x, y) = (x - y)^2$

16.- Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{2}{t}\, y + t^2\, e^t\,, \quad 1 \leq t \leq 2\,, \; y(1) = 0$$

con solución exacta $y(t) = t^2\,(e^t - e)$.
$a)$ Use el método de Runge-Kutta de orden cuatro con $h = 0.2$ para aproximar la solución.
$b)$ Use las respuestas de la parte $a)$ e interpolación para aproximar $y(1.09)$. Compare este valor con el exacto.

17.- Resuelva

$$y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2\,, \quad 1 \leq t \leq 2\,, \; y(1) = 1$$

con $h = 0.1$, mediante el método de Heun.

18.- La flexión de una placa rectangular, con carga distribuida uniformemente y sometida a una fuerza axial, se rige por una ecuación diferencial de segundo orden, dada por

$$w''(x) - \frac{S}{D}\, w(x) = -\frac{q\, l}{2D}\, x + \frac{q}{2D}\, x^2,\; 0 \leq x \leq l,$$

$$w(0) = w(l) = 0,$$

en que S representa la fuerza axial, q la intensidad de la carga uniforme, w la flexión, l la longitud de la placa y D es la rigidez de la flexión.
Si $q = 200\, \frac{lb}{pulg^2}$, $S = 100\, \frac{lb}{pulg}$, $D = 8.8 * 10^7\, \frac{lb}{pulg}$, y $l = 50\, pulg.$, determinar la flexión con un intervalo de 10 pulgadas, utilizando el método de diferencias finitas.

19.- Un cierto fenómeno físico se rige por la ecuación:

$$y'' + 2\alpha w\, y' + w^2\, y^2 = \frac{F(t)}{M}$$

con $y(2) = 0$, $y(4) = 0.5$, $w = 200$, $\alpha = 0.01$, $F(t) = 3\, sen(200t)$, $M = 1$ y tamaño de paso igual a 0.5
Se pide:
$a)$ Plantear el sistema asociado con el problema anterior.
$b)$ Describir un procedimiento para resolver el sistema de la parte $a)$.