UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS

LISTADO DE EJERCICIOS Nº 1
CÁLCULO NUMÉRICO
PLEV 2005-2006

1.- Considere el sistema lineal $Ax = b$, con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6.875 & 2.25 & 4 \\ -2.5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 1.6875 \\ 1.75 \end{bmatrix}$$

y resuélvalo por el método de Gauss, considerando 4 cifras decimales en todos los cálculos.

2.- Usando el método de Cholesky, calcular la descomposición $A = L\,L^T$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4.5 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3.- Resuelva los siguientes sistemas usando el método de Gauss-Seidel:

$a)$ $x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} = \frac{11}{6}$

$5x_1 + \frac{10}{3}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{5}{6}$

$x_1 + x_3 = 0$

Considere 3 cifras decimales.

$b)$ $1.003\,x_1 + 8.09\,x_2 = 6.12$
$5.550\,x_1 + 3.8\,x_2 = 3.776$

Considere 4 cifras decimales.

4.- El sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.001 \end{bmatrix}$$

tiene solución $(1,1)^{\mathrm{T}}$. Cambie levemente A de modo que:

$$\mathrm{A}_m = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{bmatrix}$$, y considere el sistema lineal

$$A_m \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.00001 \\ 3.00003 \end{bmatrix}$$

Determine la nueva solución $\widehat{x}$ usando 7 dígitos, y compare el error actual al estimado $\frac{\|x - \widehat{x}\|}{\|x\|}$ ¿ Es A mal condicionada ?.

5.- Resuelva el siguiente sistema por el método de Jordan:

$$\begin{aligned} &3i\,x + (2-i)\,y = i \\ &(1+2i)x + 3y = -2 \end{aligned}$$

donde $x, y \in \mathbb{C}$.

6.- La matriz de orden $n \times n$ $H^{(n)}$ definida por

$$H_{ij}^{(n)} = \tfrac{1}{i+j-1}\,,\ 1 \le i,j \le n$$

es una matriz mal condicionada. ¡ Pruébelo !.
Resuelva por el método de Jordan, el sistema lineal

$$H^{(4)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.- Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 8 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 &= 7 \\ x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Resolverlo por el método de Gauss-Seidel, con $\epsilon = 10^{-3}$

8.- Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1.5\,x_2 &= 4 \\ 1.5\,x_1 + 1.12\,x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Se pide:
$a)$ Analizar el condicionamiento del sistema.
$b)$ Aplicar el algoritmo de Jordan para su resolución.

$c)$ Sabiendo que la solución exacta es $x_1 = 2.00,\, x_2 = 0.00$; encuentre una cota inferior y una superior para el error relativo.
(Obs. : Dada una matriz $A = (a_{ij})$ utilice como norma matricial $\| \;\|_\infty$, definida como: $\| A \|_\infty = \max\limits_{i,j} | a_{ij} |$.

Además se tiene que:
$$\frac{r}{\| A \|} \leq \frac{\| x - x^* \|}{\| x^* \|} \leq r \, \| A^{-1} \|, \text{ donde } r = \frac{\| r^* \|}{\| x^* \|} \text{ y } A\,x^* - b = r^* \text{).}$$

9.- $a)$ Obtenga los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que la siguiente matriz sea definida positiva :
$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$
$b)$ Obtenga las factorizaciones de Cholesky, Crout y Doolittle.

10.- Obtenga una fórmula general para calcular la inversa de una matriz triangular inferior y use tal fórmula al resolver el siguiente sistema por el método de Gauss-Seidel.
$$\begin{aligned} x_1 - 3\,x_2 + 12\,x_3 &= 10 \\ 5\,x_1 - 12\,x_2 + 2\,x_3 &= -33 \\ x_1 - 14\,x_3 &= -103 \end{aligned}$$

11.- El método iterativo de Jacobi consiste en descomponer la matriz A en la forma
$$A = D - L - U$$
donde D es una matriz diagonal cuya diagonal es la diagonal principal de A, $-L$ es una matriz triangular inferior obtenida de la parte triangular estrictamente inferior de A, y $-U$ es la matriz triangular superior obtenida de la parte triangular estrictamente superior de A.

$a)$ Obtenga la fórmula iterativa de Jacobi y úsela para resolver el sistema
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 &= 4 \end{aligned}$$
$b)$ Resuelva el sistema anterior por el método de Gauss-Seidel, con $\epsilon = 10^{-3}$.

12.- Resuelva los sistemas

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 10 \\ 1.1\,x_1 + 2\,x_2 &= 10.4 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 10 \\ 1.05\,x_1 + 2\,x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

por el método de Cholesky. ¿ Qué puede concluir con respecto a las soluciones obtenidas ?.

13.- El método de Crout consiste en descomponer la matriz A en la forma $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior con sólo unos en la diagonal principal.
$a)$ Obtenga la descomposición de Crout para una matriz cuadrada de orden 3, con elementos reales.
$b)$ Aplique las fórmulas anteriores para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 0.7290\,x + 0.8100\,y + 0.9000\,z &= 0.6867 \\ 1.0000\,x + 1.0000\,y + 1.0000\,z &= 0.8338 \\ 1.3310\,x + 1.2100\,y + 1.1000\,z &= 1.0000 \end{aligned}$$

14.- En ciertos casos de problemas relacionados con la optimización se presentan matrices que son simétricas, pero no necesariamente definidas positivas. En tales casos se usa una factorización de la forma $A = L\,D\,L^T$ (*método de Gill y Murray*) en que L es una matriz triangular inferior con elementos unitarios en la diagonal principal y D es una matriz diagonal. Se pide:
$a)$ Deducir las fórmulas que permiten calcular los elementos de las matrices L y D a partir de los elementos de A, para $n = 3$.

$b)$ Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_2 - 3\,x_3 &= 4 \\ 3\,x_1 - x_2 + 5\,x_3 &= 2 \\ -3\,x_1 + 5\,x_2 &= 0 \end{aligned}$$

aplicando el método de Gill y Murray.

15.- Utilice pivoteo parcial para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 0.0003\,x_1 + 3.0000\,x_2 &= 2.0001 \\ 1.0000\,x_1 + 1.0000\,x_2 &= 1.0000 \end{aligned}$$

Elija el método a usar.

16.- La ecuación $e^{-k_1}\,\frac{P}{A^{k_2}} = 1$ establece una relación entre el peso P (en kilógramos) de una persona con la altura A (en metros), alcanzada por la persona cuando está sentada.
Se ha tomado una muestra de una población y se dispone de los siguientes datos:

P(kg)	20	40	50	70	85
A(m)	0.620	0.770	0.830	0.920	0.980

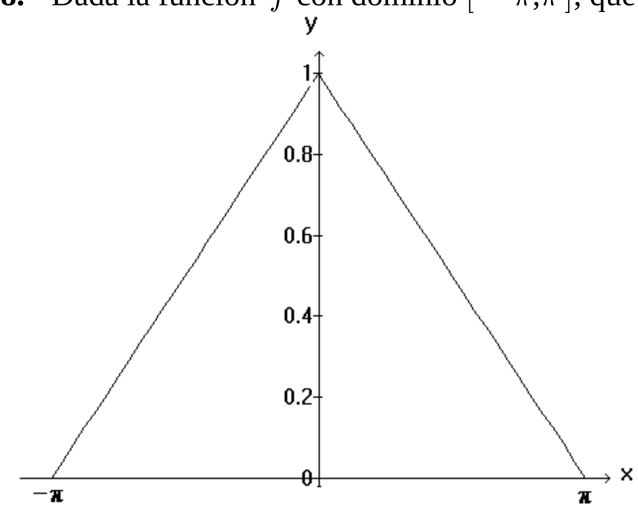
Utilizando apoximación discreta de mínimos cuadrados, se pide:
a) Determinar la ecuación que relaciona estas variables para la población en estudio.
b) Si dos personas de esa población miden sentadas medio metro y un metro respectivamente, ¿ cuáles son sus respectivos pesos ?.

17.- Sea $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

x_i	$f(x_i)$
0	1
0.2135	1.2380
0.3576	1.4273
0.4567	1.5805
0.6754	1.1925
0.8312	2.2345
1	2.7183

Encuentre la mejor aproximación discreta de mínimos cuadrados en F donde $F = \{a_1 + a_2\, x + a_3\, x^2 \; ; a_i \in \mathbb{R}\}$. Considere $w(x_i) = 1; i = 1, 2, ..., 7.$

18.- Dada la función f con dominio $[-\pi,\pi]$, que se muestra en el gráfico siguiente:



Determinar la mejor aproximación continua $\phi^* \in E_3$ de dicha función, utilizando como base de E_3 :

$$B = \{1,\, sen\, x, cos\, x\}$$

19.- Resolver mediante el método de los mínimos cuadrados discretos, para $w(x) = 1,$ el siguiente problema:
En un circuito RC la corriente está dada en función del tiempo por:

$$i = i_0\, e^{\frac{t}{RC}}$$

donde i se mide en amperes (A), R en ohms (Ω) y C en farad (F).
Considere los valores siguientes:

$t\,(seg)$	1	2	3	4	5
$i\,(A)$	8.187	6.703	5.488	4.493	3.679

Se pide obtener i_0 y el producto RC.

20.- La tabla siguiente muestra los valores de la función de Bessel, de primera clase y de orden cero, en varios puntos:

x	$B(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Obtenga, usando un método apropiado, $B(1.5)$.

21.- Se desea interpolar la función $f(x) = ln\,x$ usando un polinomio de Newton y la siguiente tabla:

x	1	4	5	6
$f(x)$	0	1.386	1.609	1.792

Usando el polinomio obtenido, calcular $ln(2)$ y $ln(3)$.

22.- Encuentre la matriz de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ que mejor aproxime a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0.33 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ en el sentido de la métrica inducida por el siguiente producto interior:

$$< A, B > \; = Traza(A\,B^T)$$