GP2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

Teoría

$\boxed{\text{T}}$ **10** Si $f(x)$ se aproxima a un número fijo L cuando x se acerca por la izquierda y por la derecha a un valor fijo k, entonces se dice que L es el *límite de $f(x)$ cuando x tiende a k*, lo que escribimos como : $\lim\limits_{x \to k} f(x) = L$
Bajo estas circunstancias se dice que el límite de la función existe y es igual a L.

Si el límite de una función existe, entonces este límite es único.

La expresión x *tiende a* k significa que x puede tomar un valor todo lo cercano que queramos a k, ya sea por la izquierda o por la derecha, pero no igual a k. Aún más, f podría no estar definida en $x = k$, pues lo que interesa es que la función esté definida en las proximidades de k.

$\boxed{\text{T}}$ **11** Si $f(x)$ tiende a un número fijo L cuando x se acerca por la izquierda a un valor fijo k, entonces L es el *límite lateral por izquierda* de $f(x)$ cuando x tiende por la izquierda a k, lo que escribimos como : $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = L$

La expresión x *tiende por la izquierda a* k significa que x puede tomar un valor todo lo cercano que queramos a k por la izquierda, pero no igual a k.

$\boxed{\text{T}}$ **12** Si $f(x)$ tiende a un número fijo L cuando x se acerca por la derecha a un valor fijo k, entonces L es el *límite lateral por derecha* de $f(x)$ cuando x tiende por la derecha a k, lo que escribimos como : $\lim\limits_{x \to k^+} f(x) = L$

La expresión x *tiende por la derecha a* k significa que x puede tomar un valor todo lo cercano que queramos a k por la derecha, pero no igual a k.

$\boxed{\text{T}}$ **13** Un resultado muy útil, especialmente cuando nos enfrentamos con funciones definidas por tramos, secciones o ramas, dice lo siguiente :

Si el límite de una función cuando x tiende a un valor fijo existe y es igual a un valor L, entonces los límites laterales existen y ambos son iguales a L. Dice además que, si los límites laterales existen y ambos son iguales a L, entonces el límite de la función existe y es también igual a L.
En símbolos :

$$\lim_{x \to k} f(x) = L \iff \lim_{x \to k^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to k^+} f(x) = L$$

Por otro lado, si uno de los límites laterales no existe, entonces el límite de la función no existe.

Adicionalmente, podemos decir que si los límites laterales existen, pero no son iguales, entonces el límite de la función no existe.

$\boxed{\text{T}}$ 14 Supongamos que c es una constante real y que los límites

$$\lim_{x \to k} f(x)$$

y

$$\lim_{x \to k} g(x)$$

existen. Entonces :

$$a) \quad \lim_{x \to k} \Big[f(x) + g(x) \Big] = \lim_{x \to k} f(x) \ + \ \lim_{x \to k} g(x)$$

En palabras : el límite de una suma es la suma de los límites

$$b) \quad \lim_{x \to k} \Big[f(x) - g(x) \Big] = \lim_{x \to k} f(x) \ - \ \lim_{x \to k} g(x)$$

En palabras : el límite de una diferencia es la diferencia de los límites

$$c) \quad \lim_{x \to k} \Big[c\, f(x) \Big] = c \lim_{x \to k} f(x)$$

En palabras : el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función
En particular, si $f(x) = 1$, entonces

$$\lim_{x \to k} c = c$$

En palabras : el límite de una constante es la constante.

$$d) \quad \lim_{x \to k} \Big[f(x)\, g(x) \Big] = \lim_{x \to k} f(x) \cdot \lim_{x \to k} g(x)$$

En palabras : el límite de un producto es el producto de los límites

$$e) \quad \lim_{x \to k} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to k} f(x)}{\lim_{x \to k} g(x)} \text{ , si } \lim_{x \to k} g(x) \neq 0$$

En palabras : el límite de un cuociente es el cuociente de los límites

$f)\quad \lim_{x \to k} \Big[f(x) \Big]^n = \Big[\lim_{x \to k} f(x) \Big]^n$, con n un entero positivo.

En palabras : el límite de una potencia es la potencia del límite

$g)\quad \lim_{x \to k} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to k} f(x)}$, con n un entero positivo.

Si n es par, entonces es obligatorio que $\lim_{x \to k} f(x) \geq 0$

En palabras : el límite de una raíz es la raíz del límite

$\boxed{\text{T}}$ 15 Una función f es *continua en* $x = k$ si $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

En forma explícita, lo anterior significa que se deben cumplir tres cosas :

$i)$ $f(k)$ debe estar definida

$ii)$ $\lim_{x \to k} f(x)$ debe existir

$iii)$ $\lim_{x \to k} f(x) = f(k)$

Si f no es continua en $x = k$, entonces f se dice *discontinua en* k, o que posee una *discontinuidad en* k.

Geométricamente hablando, una función es continua cuando al trazarla sobre un papel nunca levantamos el lápiz.

$\boxed{\text{T}}$ 16 Una función f es *continua por la izquierda en* $x = k$ si f está definida en $x = k$ y además $\lim_{x \to k^-} f(x) = f(k)$
Una función f es *continua por la derecha en* $x = k$ si f está definida en $x = k$ y además $\lim_{x \to k^+} f(x) = f(k)$

$\boxed{\text{T}}$ 17 Una función f es *continua en un intervalo abierto* (a, b) *ó* (a, ∞) *ó* $(-\infty, b)$ *ó* $(-\infty, \infty)$ si es continua en cada número del intervalo abierto considerado.

Una función f *es continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ si f es continua en (a, b) y además continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

De forma similar se define la continuidad de funciones en intervalos semiabiertos o semicerrados, por ejemplo, f es continua en $(a, b]$ si es continua en (a, b) y además es continua por la izquierda en b.

$\boxed{\text{T}}$ **18** Si f y g son continuas en $x = k$, y c es una constante, entonces las siguientes funciones también son continuas en $x = k$:
$a)$ $f + g$
$b)$ $f - g$
$c)$ $c\,f$
$d)$ c
$e)$ $f\,g$
$f)$ $\frac{f}{g}$, si $g(k) \neq 0$

$\boxed{\text{T}}$ **19** Todos los polinomios son continuos en $\mathbb{R}$. Además cualquier función racional, es decir un cuociente de polinomios, es continua en todo su dominio.

$\boxed{\text{T}}$ **20** Si n es un entero positivo par, entonces $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en $[0, \infty)$
Si n es un entero positivo impar, entonces $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es continua en $(-\infty, \infty)$

$\boxed{\text{T}}$ **21** Si g es una función continua en k y f es una función continua en $g(k)$, entonces la compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en k.

$\boxed{\text{T}}$ **22** Las discontinuidades en un punto se pueden clasificar en evitables o removibles, y en inevitables o no removibles.

Discontinuidades removibles.
$i)$ La función f no está definida en $x = k$, pero existe $\lim_{x \to k} f(x)$
En este caso se puede extender la definición de la función de modo que $f(k)$ sea igual al valor del límite $\lim_{x \to k} f(x)$

$ii)$ La función f está definida en $x = k$ y existe el límite $\lim_{x \to k} f(x)$, pero $\lim_{x \to k} f(x) \neq f(k)$
En este caso se puede redefinir la función de modo que $f(k)$ sea igual al valor del límite $\lim_{x \to k} f(x)$

Discontinuidades no removibles.
$i)$ Los límites laterales son distintos, es decir, $\lim_{x \to k^-} f(x) \neq \lim_{x \to k^+} f(x)$

$ii)$ No existe, por lo menos, uno de los límites laterales, es decir, no existe $\lim_{x \to k^-} f(x)$ o no existe $\lim_{x \to k^+} f(x)$