Geometría Analítica

Adan Flores Opazo - Juan Carlos Sandoval Avendaño

20 de marzo de 2012

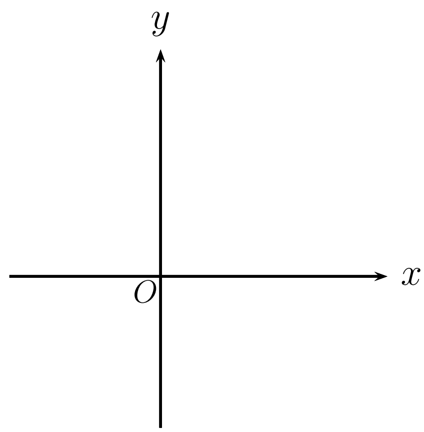
Índice

1. Introducción

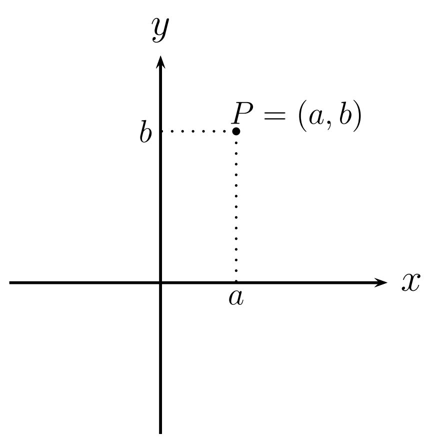
La ***geometría analítica*** consiste en representar entes geométricos, como por ejemplo el punto o la recta, mediante el uso del álgebra y del cálculo.

2. Distancia en el Plano

Un ***plano*** es una superficie lisa sin grosor, y en geometría analítica esto se genera mediante el uso de dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto O llamado ***origen***; tales rectas se denominan ***ejes coordenados***, y es habitual nombrarlos como eje x el horizontal, y eje y el vertical. El plano que se obtiene se denomina ***plano cartesiano***.



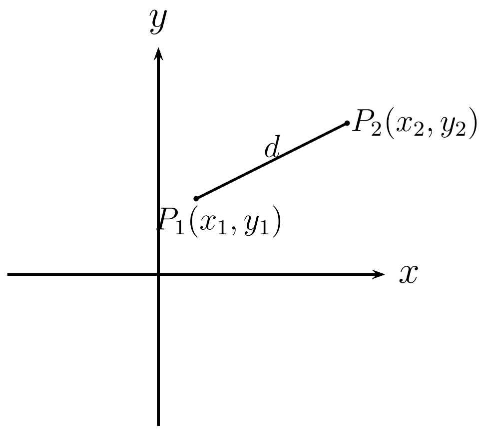
Un punto del plano cartesiano se puede representar mediante un par ordenado de números reales, es decir, un punto P del plano puede ser escrito como (a, b) donde a es la coordenada ubicada en el eje horizontal y b es la coordenada ubicada en el eje vertical. Es común anotar $P(a, b)$ para indicar el nombre del punto del plano y sus coordenadas.



2.1. Distancia entre dos puntos

Definición 2.1. *La* ***distancia*** d *entre los puntos* $P_1 = (x_1, y_1)$ *y* $P_2 = (x_2, y_2)$ *del plano está dada por*

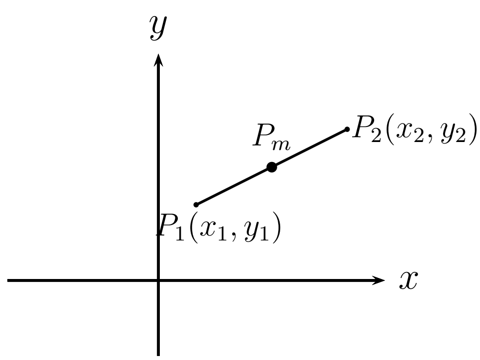
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



2.2. Punto Medio

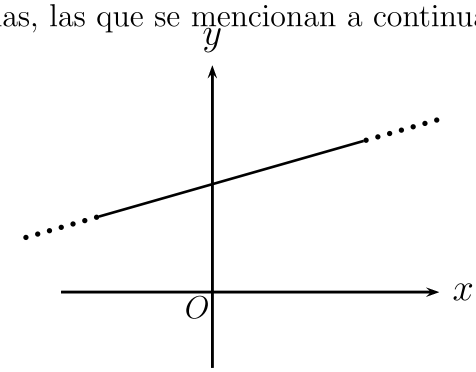
Definición 2.2. *El* ***punto medio*** P_m *entre los puntos* $P_1 = (x_1, y_1)$ *y* $P_2 = (x_2, y_2)$ *del plano está dado por*

$$P_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



3. Rectas

Desde el punto de vista geométrico una ***recta*** es una sucesión infinita de puntos que se extienden en una misma dirección, y desde el punto de vista algebraico es posible escribir una recta de distintas formas, las que se mencionan a continuación.



3.1. Forma Punto-Punto

Conocidos dos puntos del plano $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es posible obtener la ecuación de la recta que pasa por ellos, a saber

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Esta manera de escribir la ecuación de la recta se conoce como ***forma punto-punto***.
En la expresión anterior se escogió el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ para obtener la ecuación de la recta, pero también es posible usar el punto $P_2 = (x_2, y_2)$ resultando

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

3.2. Forma Punto-Pendiente

Definición 3.1. *Se define la* ***pendiente*** *de una recta no vertical, que pasa por los puntos* $P_1 = (x_1, y_1)$ *y* $P_2 = (x_2, y_2)$*, como el cuociente*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1 = (x_1, y_1)$ y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

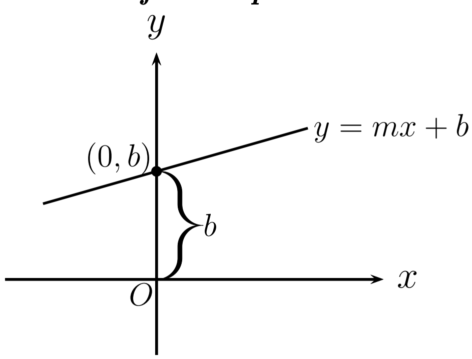
conocida como ***forma punto-pendiente***.

3.3. Forma Pendiente-Intersección

Si conocemos la pendiente m y el punto $(0, b)$ donde la recta interseca el eje vertical, entonces podemos escribir la ecuación de la recta como

$$y = mx + b$$

conocida como ***forma pendiente-intersección***.



3.4. Forma General

La ***forma general*** de una recta en el plano está dada por la expresión

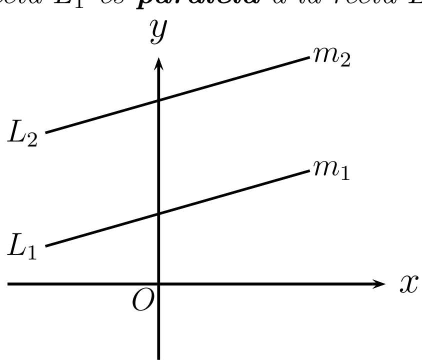
$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes reales, con al menos una de las constantes A o B distinta de cero.

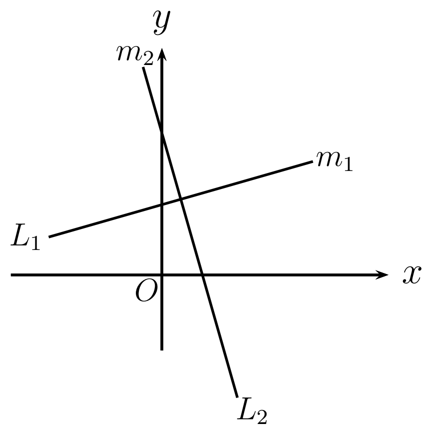
3.5. Rectas Paralelas y Rectas Perpendiculares

Definición 3.2. *Sean L_1 y L_2 dos rectas no verticales con pendientes m_1 y m_2, respectivamente.*

- *La recta L_1 es **paralela** a la recta L_2 sí y sólo si poseen la misma pendiente, es decir, $m_1 = m_2$*

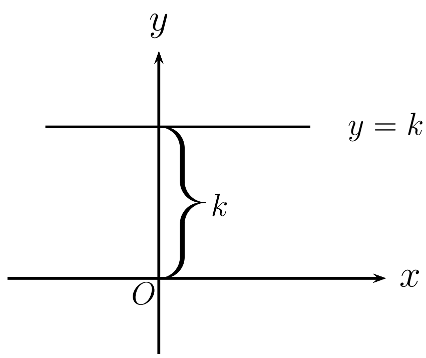


- *La recta L_1 es **perpendicular** a la recta L_2 sí y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$*

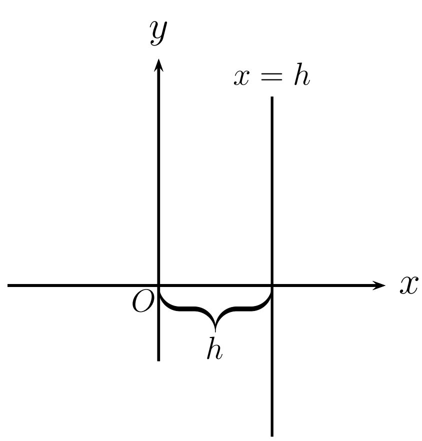


3.6. Rectas Paralelas a los Ejes Coordenados

- Una recta paralela al eje horizontal x tiene la forma $y = k$ donde k es una constante real, y se denomina justamente ***recta horizontal*** . La pendiente de una recta horizontal es $m = 0$.



- Una recta paralela al eje vertical y tiene la forma $x = h$ donde h es una constante real, y se denomina ***recta vertical*** .
  La pendiente de una recta vertical no está definida.
  Dos rectas verticales siempre serán paralelas porque tienen la misma inclinación.
  Una recta vertical siempre es perpendicular a una recta horizontal.

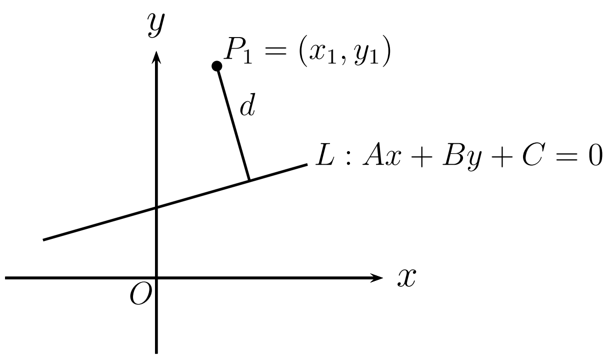


3.7. Distancia de un punto a una recta

Definición 3.3. *La **distancia** d desde el punto del plano $P_1 = (x_1, y_1)$ a la recta $L : Ax + By + C = 0$ está dada por*

$$d(P_1, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

En la definición anterior se asume que A y B no son ceros a la vez.



4. Secciones Cónicas

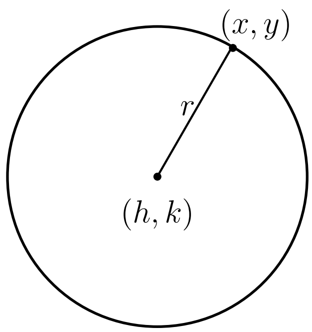
Las ***secciones cónicas*** o simplemente ***cónicas*** son las curvas que se obtienen de la intersección de un cono circular recto de dos hojas, y un plano que no pasa por el vértice del cono mencionado.

4.1. Ecuación Canónica de la Circunferencia

Definición 4.1. *Sean* (h,k) *un punto del plano y sea* $r>0$. *El conjunto de los puntos* (x,y) *cuya distancia al punto* (h,k) *es* r *se llama* ***circunferencia*** *de* ***centro*** (h,k) *y* ***radio*** r.

La ecuación canónica de la circunferencia de centro (h,k) y radio r es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

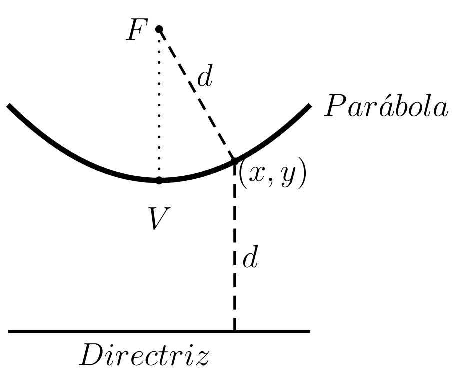
En efecto



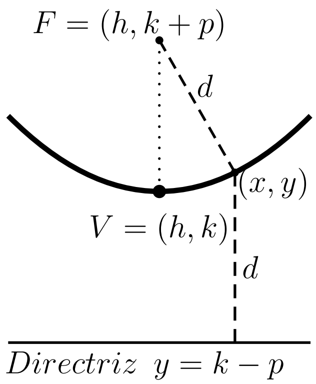
$$r=d((x,y),(h,k))=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} \Rightarrow r^2=(x-h)^2+(y-k)^2.$$

4.2. Ecuación Canónica de la Parábola

Definición 4.2. *Una* ***parábola*** *es el conjunto de todos los puntos* (x,y) *que equidistan de una recta fija llamada* ***directriz*** *y un punto fijo llamado* ***foco*** *que está fuera de dicha recta.*



Observación: El punto medio entre el foco y la directriz se llama ***vértice***, y la recta que pasa por el foco y por el vértice se llama ***eje de la parábola***. Una parábola es simétrica con respecto a su eje.



Supongamos que la directriz es paralela al eje x y el foco está encima del eje. Si (x, y) es cualquier punto de la parábola, por definición ha de ser equidistante del foco $F(h, k+p)$ y la directriz $y = k-p$, es decir

$d(P, F) = d(P, D)$

$\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = y - (k-p) \qquad\qquad (\,)^2$

$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-(k+p))^2 = (y-(k-p))^2$

$\Rightarrow (x-h)^2 = 4p(y-k).$

En general se tiene:

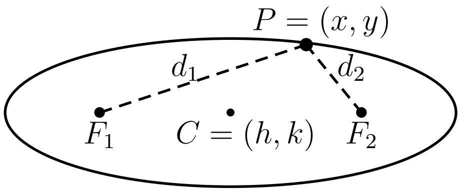
Ecuación	Vértice	Eje	Foco	Directriz	La gráfica se extiende hacia
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	(h, k)	$x = h$	$(h, k+p)$	$y = k - p$	arriba si $p > 0$; abajo si $p < 0$
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	(h, k)	$y = k$	$(h+p, k)$	$x = h - p$	la derecha si $p > 0$; la izquierda si $p < 0$

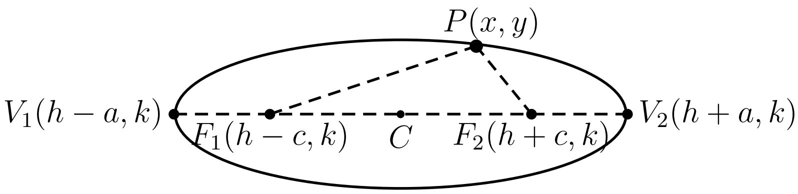
4.3. Ecuación Canónica de la Elipse

Definición 4.3. *Una **elipse** es el conjunto de puntos $P(x, y)$ del plano tales que la suma de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 llamados **focos** , es constante.*

Observaciones:

1. El punto medio del segmento de recta $\overline{F_1F_2}$ se llama ***centro*** de la elipse.
2. Para deducir la ecuación canónica de la elipse consideraremos que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.





Deduzcamos a partir de la información anterior la ecuación canónica de la elipse.

$d_1+d_2=2a \Rightarrow \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} + \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = 2a$

$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} + \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = 2a$

$\Rightarrow \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} = 2a - \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \qquad (\,)^2$

$\Rightarrow (x-(h-c))^2+(y-k)^2 =$

$4a^2 - 4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} + (x-(h+c))^2+(y-k)^2$

$\Rightarrow x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2+(y-k)^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$

$+x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2+(y-k)^2$

$\Rightarrow 4xc-4hc = 4a^2-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$

$\Rightarrow 4c(x-h)-4a^2 = -4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \qquad (\,)^2$

$\Rightarrow (4c(x-h)-4a^2)^2 = 16a^2((x-(h+c))^2+(y-k)^2)$

$\Rightarrow 16c^2(x-h)^2-32a^2c(x-h)+16a^4 = 16a^2x^2-32a^2x(h+c)+16a^2(h+c)^2+$

$16a^2(y-k)^2$

$\Rightarrow 16c^2(x-h)^2+16a^4 = (4ax-4ah)^2+16a^2c^2+16a^2(y-k)^2$

$$\Rightarrow 16c^2(x-h)^2 - (4ax - 4ah)^2 - 16a^2(y-k)^2 = 16a^2c^2 - 16a^4$$

$$\Rightarrow 16c^2(x-h)^2 - 16a^2(x-h)^2 - 16a^2(y-k)^2 = 16a^2c^2 - 16a^4$$

$$\Rightarrow 16(c^2-a^2)(x-h)^2 - 16a^2(y-k)^2 = 16a^2(c^2-a^2) \quad / : 16a^2(c^2-a^2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x\,-\,h)^2}{a^2} - \frac{(y\,-\,k)^2}{c^2\,-\,a^2} = 1 \quad (\text{ si hacemos } \quad c^2 = a^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow \frac{(x\,-\,h)^2}{a^2} - \frac{(y\,-\,k)^2}{-b^2} = 1 \;\Rightarrow \frac{(x\,-\,h)^2}{a^2} + \frac{(y\,-\,k)^2}{b^2} = 1$$

Observaciones:

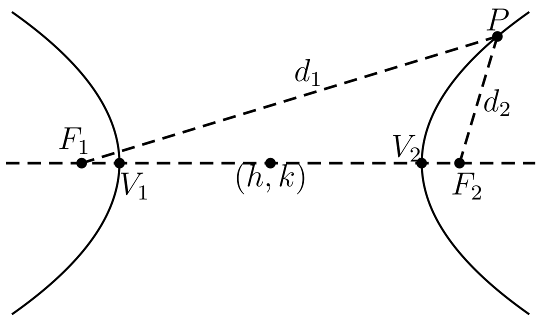
1. La recta que pasa por los focos corta a la elipse en dos puntos llamados vértices.
2. La cuerda que une los vértices se llama eje mayor de la elipse y tiene longitud $2a$, y el punto medio de la cuerda es el centro de la elipse.
3. La cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por el centro de la elipse, se llama eje menor y tiene longitud $2b$.
4. Los focos están ubicados en el eje mayor, a una distancia c del centro, con $c^2 = a^2 - b^2$.
5. La excentricidad e de una elipse mide el achatamiento de la elipse, y está dada por $e = \dfrac{c}{a}$, $0 < e < 1$.

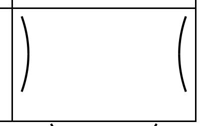
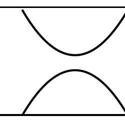
En general se tiene:

Ecuación	Centro	Vértice	Focos	Eje mayor	Gráfico	
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y\,-\,k)^2}{b^2} = 1$	(h,k)	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$	Horizontal		$c^2 = a^2 - b^2$
$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y\,-\,k)^2}{a^2} = 1$	(h,k)	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$	Vertical		$c^2 = a^2 - b^2$

4.4. Ecuación Canónica de la Hipérbola

Definición 4.4. *Una **hipérbola** es el conjunto de puntos (x,y) para los que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados **focos** es constante. Es decir,* $d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2\,a$



Ecuación	Centro	Vértice	Focos	Eje Transv.	Asíntotas	Gráfico
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	(h, k)	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$	Horizontal	$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$	
$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	(h, k)	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$	Vertical	$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$	

4.5. Clasificación de las Cónicas según su Ecuación General

La gráfica de la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$ es la curva que se menciona bajo las condiciones indicadas.

- (a) Circunferencia: $A = B$.
- (b) Parábola: $AB = 0$, $A = 0$ ó $B = 0$ (pero no ambos).
- (c) Elipse: $AB > 0$, A y B tienen el mismo signo.
- (d) Hipérbola: $AB < 0$, A y B tienen signos distintos.

5. Ejercicios

1. Determine la distancia y el punto medio entre el par de puntos dados

   a) $(-1,2)$, $(3,1)$
   b) $(\pi,2)$, $(0,1)$
   c) (a,b), (b,a)

2. Encuentre la ecuación de la recta y dibuje dicha recta

   a) Recta que pasa por los puntos $(-1,2)$, $(4,1)$.
   b) Recta que pasa por los puntos $(-2,2)$, $(1,1)$.
   c) Recta que pasa por el punto $(\pi$,-1$)$ y que tiene pendiente igual a -1.
   d) Recta que pasa por el punto (1,1) y que tiene pendiente igual a 1.
   e) Recta que tiene pendiente igual a $\frac{1}{2}$ e intersección con el eje y en -1.

3. Grafique las rectas y encuentre el punto de intersección entre ellas

   a) $y = 3x - 1$; $y = 2x + 1$
   b) $3y - 2x = 3$; $y = x$
   c) $-2\,y - x - 1 = 0$; $x + 5y = 2$.

4. Encuentre la ecuación de la recta que es paralela a la recta L dada y que pasa por el punto P.

   a) $L:\ 2x + 3y = 1; P(-1,1)$
   b) $L:\ y = \pi x - 1; P(2,\pi)$
   c) $L:\ -2x + 3y = 4; P(-1,1)$.

5. Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta L dada y que pasa por el punto P.

   a) $L:\ y = 2x + 1; P(-1,3)$
   b) $L:\ y - 1 = 2(x-3); P(2,-1)$
   c) $L:\ 3y - x + 1 = 0; P(1,1)$.

6. Dadas las rectas

   $L_1:\ 3x - 2y = 1$

   $L_2:\ ax + by = 1$

   encuentre la relación entre a y b de modo que

   (a) La recta L_1 sea perpendicular a la recta L_2.

   (b) La recta L_1 sea paralela a la recta L_2.

7. Determine la distancia y el punto medio entre el par de puntos dados $A\,(\pi, 2)$ y $B\,(0, 1)$

   Solución: $d(A, B) = \sqrt{(0\,-\,\pi)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{\pi^2+1}\,.$
   $\left(\dfrac{x_1\,+\,x_2}{2}, \dfrac{y_1+\,y_2}{2}\right) = \left(\dfrac{\pi\,+\,0}{2}, \dfrac{2+\,1}{2}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\right).$

8. Encuentre la ecuación de la recta y dibuje dicha recta

   a) Recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(4, 1)$.

   b) Recta que pasa por el punto $(1, 1)$ y que tiene pendiente igual a 1.

   Solución:

   a) La ecuación de la recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) está dada por
   $y - y_1 = \dfrac{y_2\,-\,y_1}{x_2\,-\,x_1}(x\,-\,x_1)$
   En este caso los puntos son $(-1, 2)$, $(4, 1)$. Luego:
   $y - 2 = \dfrac{1-2}{4-(-1)}(x-(-1)) \Rightarrow y - 2 = -\dfrac{1}{5}(x+1) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{9}{5}.$

   b) La ecuación punto pendiente es $y - y_1 = m(x\,-\,x_1)$.
   En este caso $(x_1, y_1) = (1, 1)$ y $m = 1$. Luego la recta pedida es $y - 1 = (x\,-\,1)$, es decir, $y = x$.

9. Encuentre el punto de intersección entre las rectas $-2\,y - x - 1 = 0$ y $x + 5y = 2$.

   Solución:

   $-x - 2y = 1$

   $x + 5y = 2$

   Sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

   $3y = 3 \Rightarrow y = 1$

   Despejando x de la segunda ecuación y reemplazando en ésta el valor de y recién calculado, se tiene que:

   $x = 2 - 5y \Rightarrow x = 2 - 5(1) = -3$

   Finalmente, el punto de intersección es $(x, y) = (-3, 1)$.

10. Encuentre la ecuación de la recta que es paralela a la recta $L:\ 2x + 3y = 1$ y que pasa por el punto $P(-1, 1)$.

    Solución:

    $2x + 3y = 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1 \Rightarrow m = -\frac{2}{3},$

Si recordamos que dos rectas paralelas tienen igual pendiente, podemos concluir que la recta pedida tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$

Luego la recta pedida tendrá la forma $y = -\frac{2}{3}x + n$

Ahora, de acuerdo al enunciado, el punto $P(-1, 1)$ pertenece a la recta pedida, por lo tanto $1 = -\frac{2}{3}(-1) + n \Rightarrow n = \frac{1}{3}$,

Finalmente la ecuación de la recta es: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

11. Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $L:\ y = 2x + 1$ y que pasa por el punto $P(-1, 3)$.

    Solución:

    Sean m_1 y m_2 las pendientes de la recta dada y de la recta que buscamos, respectivamente.

    En este caso $m_1 = 2$

    Además, dado que las rectas son perpendiculares, se tiene que $m_1 \cdot m_2 = -1$

    Luego $m_2 = -\frac{1}{2}$, por lo tanto la recta pedida es $y = -\frac{1}{2}x + n$,

    Por otro lado, $P(-1, 3)$ pertenece a la recta buscada, así:

    $3 = -\dfrac{1}{2}(-1) + n \Rightarrow n = \dfrac{5}{2}$

    Finalmente, la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $L:\ y = 2x + 1$ y que pasa por el punto $P(-1, 3)$ es: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$.

12. En cada uno de los siguientes casos identifique la cónica, focos, vértices, centro y asíntotas, donde sea posible. Hacer la gráfica.

    a) $x^2 + y^2 - 2\,x - 2\sqrt{2}\ y + 1 = 0$
    b) $2x^2 + y^2 + 4\,x + 2\sqrt{3}\ y + 1 = 0$
    c) $-2x^2 + y^2 - 4\,x - 2\,y - 3 = 0$
    d) $x^2 - 4\,x - 4\,y = 0$
    e) $-2x + y^2 + 2\sqrt{2}\,y + 2 = 0$
    f) $3x^2 + 3y^2 + 12\,x - 6\,y + 14 = 0$
    g) $10x^2 - 4y^2 + 8y - 20\sqrt{2}\ x - 4 = 0$
    h) $x^2 + \sqrt{2}\ y^2 - 2\,x + 2\sqrt{2}\ y + 1 = 0$
    i) $2x^2 - y^2 - 4 = 0$

j) $x^2+y^2+2\,x+2\sqrt{2}\,y+1=0.$

k) $x^2+4\,y^2-6\,x+16\,y+21=0$

Solución:

Completando cuadrados

$(x-3)^2+4(y+2)^2=4$

$\dfrac{(\,x\;-\;3\,)^2}{4}+\dfrac{(y\;+\;2)^2}{1}=1$

Sean: $x'=x-3;\ y'=y+2$

$\dfrac{(\,x'\,)^2}{4}+\dfrac{(y')^2}{1}=1$; (Forma canónica de la elipse).

$c^2=a^2\,-b^2;\ a^2=4;\ b^2=1\Rightarrow\ c^2=4-1=3\Rightarrow c=\sqrt{3}\,.$

Focos: (± c,0); Vértices: (± a,0)

Plano	$x'\,y'$	$x\,y$
Focos	$(\pm\sqrt{3}\,,0)$	$(3\pm\sqrt{3}\,,-2)$
Vértices	(± 2,0)	(3± 2, -2)
Centro	$(0,0)$	$(3,-2)$

l) $y^2-4\,y-4\,x=0$

Solución:

Completando cuadrados

$(y-2)^2=4(x+1)$

$x'=x+1;\ y'=y-2$ (Ecuaciones de traslación)

$(y')^2=4(1)\,x'$ (Forma canónica de la parábola)

$p=1;$ Foco: $(p,0)=(1,0);$ Directriz: $x'=-p=-1;$ Vértice: (0,0)

Plano	$x'\,y'$	$x\,y$
Focos	$(1\,,0)$	(0,2)
Vértices	(0,0)	(-1, 2)
Directriz	$x'=-1$	$x=-2$

m) $4\,y^2-2\,x^2-4\,y-8\,x-15=0$

Solución:

Completando cuadrados se tiene:

$\dfrac{(y\;-\;\frac{1}{2})^2}{2}-\dfrac{(x\;+\;2)^2}{4}=1;\ a^2=2,\ b^2=4,\ c^2=a^2+b^2=6\Rightarrow c=\sqrt{6}$

$x'=x+2;\ y'=y-\frac{1}{2}$

Focos: (± c,0) $=(0,\pm\sqrt{6}\,)$; Vértices: (0,± a)$=(0,\pm\sqrt{2}\,)$

Asíntotas : $\ y'=\pm\frac{a}{b}x'\Rightarrow y'=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,x'.$

13. Encontrar el foco y la directriz de la parábola $y^2+10\,x=0$ y hacer su gráfico.

14. Encontrar la ecuación de la elipse con focos $(0,\pm2)$ y vértices $(0,\pm3)$.

15. Encontrar los focos y la ecuación de la hipérbola con vértices $(0,\pm1)$ y asíntota $y=2x$.

16. Encontrar la ecuación de la elipse con focos $(2,-2)$ y $(4,-2)$, y vértices $(1,-2)$ y $(5,-2)$.

17. Encuentre los vértices, focos de la cónica dada y trace el gráfico. En el caso de una hipérbola, determine las asíntotas.

    a) $9x^2 + 4y^2 - 18x = 27$
    b) $16x^2 - 9y^2 + 64x - 90y = 305$
    c) $2y^2 - 3x^2 + 12x - 4y + 8 = 0$
    d) $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 7 = 0$.

18. Encuentre la ecuación de la cónica que satisface las condiciones dadas:

    a) Parábola, Foco$(1, -1)$, directriz $y = 5$.
    b) Parábola que pasa por los puntos $(-2, 3)$, $(0, 3)$ y $(1, 9)$, con eje vertical.
    c) Parábola, vértice $(0, 0)$, eje en el eje x, y pasa por $(1, -4)$.
    d) Elipse, focos(3,$\pm$ 1), vértice(3,$\pm$ 3).
    e) Elipse, centro(2,2) un foco(0,2) y vértice $(5, 2)$.
    f) Elipse; focos($\pm$ 1,2), longitud eje mayor igual a 6.
    g) Hipérbola; focos$(2, -2)$ y $(2, 8)$, vértices $(2, 0)$ y $(2, 6)$.
    h) Hipérbola; vértice($\pm$ 3,0), asíntota $y = \pm 2x$.
    i) Hipérbola; focos$(2, 2)$ y $(6, 2)$, asíntotas $y = x - 2$ y $y = 6 - x$.

Índice alfabético