Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería Agrícola

ESPACIOS VECTORIALES

Facultad de Ingeniería Agrícola
www.fiaudec.cl

Juan Carlos Sandoval Avendaño

Edición Julio 2020

ESPACIOS VECTORIALES

1 Espacio Vectorial

Un *espacio vectorial* es una terna $(V, +, *)$ donde V es conjunto no vacío, $+$ es una operación denominada suma, y $*$ es otra operación llamada producto por escalar. Los elementos de V se denominan vectores y las operaciones mencionadas deben satisfacer las siguientes propiedades, para $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c} \in V$, α y $\beta \in \mathbb{K}$

S1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ Propiedad conmutativa

S2) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ Propiedad asociativa

S3) Existe $\theta_V \in V$ tal que $\boldsymbol{a} + \theta_V = \theta_V + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ Elemento neutro

S4) Para cada $a \in V$ existe $-a \in V$ tal que

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \theta_V$$ Elemento opuesto

PE1) $\alpha * (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha * \boldsymbol{a} + \alpha * \boldsymbol{b}$

PE2) $(\alpha + \beta) * \boldsymbol{a} = \alpha * \boldsymbol{a} + \beta * \boldsymbol{a}$

PE3) $(\alpha\beta) * \boldsymbol{a} = \alpha(\beta * \boldsymbol{a})$

PE4) $1 * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$, donde 1 es el elemento neutro de $\mathbb{K}$

El conjunto $\mathbb{K}$ de escalares puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, pero de ahora en adelante trabajaremos con espacios vectoriales reales, es decir, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Es común mencionar sólo el conjunto V cuando nos referimos a un espacio vectorial, y no anotar la terna $(V, +, *)$.

2 Propiedades Adicionales para un espacio vectorial

1) El elemento neutro θ_V es único

2) El elemento opuesto es único

3) $\alpha\,\theta_V = \theta_V,\ \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\boldsymbol{a}\,\theta_V = \theta_V,\ \boldsymbol{a} \in V$

5) $(-\alpha)\,\boldsymbol{a} = -(\alpha\,\boldsymbol{a});\ \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in V$

6) $\alpha\,\boldsymbol{a} = \theta_V \Rightarrow \alpha = 0$ ó $\boldsymbol{a} = \theta_V$

3 Ejemplos de Espacios Vectoriales

1) $V = \mathbb{R}$
Suma
$a + b;\ a, b \in \mathbb{R}$

Producto por escalar
$\alpha a;\ \alpha \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$

2) $V = \mathbb{R}^2$
Suma
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2];\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$

Producto por escalar
$\alpha\boldsymbol{a} = \alpha[a_1, a_2] = [\alpha a_1, \alpha a_2];\ \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$

3) $V = \mathbb{R}^3$
Suma
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_1, a_2, a_3] + [b_1, b_2, b_3] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3];\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$

Producto por escalar
$\alpha\boldsymbol{a} = \alpha[a_1, a_2, a_3] = [\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3];\ \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$

4) $V = \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}$
Suma
$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_1, a_2, .., a_n] + [b_1, b_2, ..., b_n] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n];\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$

Producto por escalar

$\alpha \boldsymbol{a} = \alpha\big[a_1, a_2, ..., a_n\big] = \big[\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n\big];\ \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$

5) $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

Suma

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & . & . & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & . & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & . & . & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & . & . & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix};\ A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

Producto por escalar

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & . & . & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & . & . & \alpha a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & . & . & \alpha a_{mn} \end{pmatrix};$$

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \alpha \in \mathbb{R}$

6) $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ = conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n, con coeficientes reales.

Suma

Supongamos que $p \le q \le n$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_0 + a_1x + ... + a_px^p) + (b_0 + b_1x + ... + b_qx^q)$

$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_p + b_p)x^p + ... + (a_q + b_q)x^q;\ \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

Producto por escalar

$\alpha \boldsymbol{a} = \alpha(a_0 + a_1x + ... + a_px^p) = (\alpha a_0 + \alpha a_1x + ... + \alpha a_px^p);\ \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{a} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

7) $V = \mathcal{C}\big[c, d\big]$ = conjunto de todas las funciones continuas en el intervalo $\big[c, d\big]$

Suma

$(f + g)(x) = f(x) + g(x);\ \ f, g \in \mathcal{C}\big[c, d\big]$

Producto por escalar

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x);\ \alpha \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}[c,d]$

4 Subespacio Vectorial

Sea $(V, +, *)$ un espacio vectorial y sea $S \subseteq V$

S es un *subespacio vectorial* de V sí y sólo si se cumplen las propiedades

$i)\ S \neq \emptyset$

$ii)\ \boldsymbol{a} \in S,\ \boldsymbol{b} \in S \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in S$ Clausura para la suma

$iii)\ \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in S \Rightarrow \alpha * \boldsymbol{a} \in S$ Clausura para el producto por escalar

Si S es subespacio vectorial de V, entonces lo escribiremos $S \leq V$

5

Sea $(V, +, *)$ un espacio vectorial.

$a)$ Los conjuntos $\{\theta_V\}$ y V son subespacios vectoriales de V, denominados subespacios vectoriales triviales.

$b)$ Un subespacio vectorial siempre contiene al vector nulo θ_V del espacio V.

$c)$ Un subespacio vectorial S es un espacio vectorial con las mismas operaciones suma y producto por escalar de V

6 Combinación Lineal

Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$.

El vector $\boldsymbol{v}$ es *combinación lineal* (C.L.) de los vectores de B si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tales que

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 * \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 * \boldsymbol{v}_2 + ... + \alpha_n * \boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * \boldsymbol{v}_i$$

Como observación, podemos mencionar que el vector nulo θ_V es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.
Por otro lado, el conjunto de todas las combinaciones lineales de vectores de $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$, denotado $< B >$, forma un subespacio vectorial, es decir,

$$< B > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * \boldsymbol{v}_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n \right\} \leq V$$

conocido como el *subespacio generado por* B, o como el subespacio generado por los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n$

7 Conjunto linealmente independiente y linealmente dependiente

Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$.

El conjunto B es *linealmente independiente* (l.i.) sí y sólo si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i * \boldsymbol{v}_i = \theta_V \Rightarrow \ \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$$

Lo anterior significa que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i * \boldsymbol{v}_i = \theta_V$ posee única solución.

El conjunto B es *linealmente dependiente* (l.d.) si no es linealmente independiente; esto significa que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i * \boldsymbol{v}_i = \theta_V$ posee infinitas soluciones.

8

$a)$ Todo conjunto que contenga al vector nulo del espacio vectorial es l.d.

$b)$ Todo conjunto con un sólo elemento distinto del nulo es l.i.

$c)$ El conjunto vacío es l.i.

$d)$ Si el conjunto $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ es l.d., entonces uno de los vectores de B es combinación lineal de los restantes. Además, si uno de los vectores es combinación lineal de los restantes, entonces el conjunto es l.d.

$e)$ Todo subconjunto de un conjunto l.i. es l.i.

$f)$ Todo conjunto de vectores que contenga un subconjunto l.d. es l.d

$g)$ Un conjunto B es l.i. si ningún vector de B es combinación lineal de los restantes.

9 Base de un Espacio Vectorial

Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$.

El conjunto B es *base* de V sí y sólo si

$i) \ < B > \ = V$

$ii)$ B es l.i.

10

$a)$ La igualdad $< B > \ = V$ significa que todo vector de V se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B

$b)$ $\emptyset$ es base de $\{\theta_V\}$

$c)$ Dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de elementos

11 Dimensión de un Espacio Vectorial

La *dimensión de un espacio vectorial* es el número de elementos de una base cualquiera del espacio.

La dimensión de un espacio vectorial V se denota $dim(V)$

12

$a)\ dim(\{\theta_V\}) = 0$

$b)\ dim(\mathbb{R}) = 1$

$c)\ dim(\mathbb{R}^2) = 2$

$d)\ dim(\mathbb{R}^n) = n$, con $n \in \mathbb{N}$

$e)\ dim(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$

$f)\ dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n + 1$

$g)\ dim(\mathcal{C}[c,d]) = \infty$

$h)$ Trabajaremos sólo con espacios vectoriales de dimensión finita.

$i)$ Si $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\} \subseteq V$ y $dim(V) = n$, entonces B es base de V si B es l.i. Esto significa que si el número de vectores de B coincide con la dimensión del espacio, sólo bastaría probar que B es l.i. para concluir que es base

$j)$ Si $dim(V) = n$ y $S \leq V$, entonces $dim(S) \leq n$

$k)$ Si $dim(V) = n$, $S \leq V$ y $dim(S) = n$, entonces $S = V$

13 Coordenadas de un Vector con Respecto a una Base

Sea V un espacio vectorial y sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ una base de V.
Un vector $\boldsymbol{v}$ cualquiera de V se puede escribir de manera única como combinación de los vectores de B, es decir, existen escalares únicos α_i tales que

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i * \boldsymbol{v}_i$$

El vector $[\boldsymbol{v}]_B = [\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n]$ se denomina *vector de coordenadas o vector coordenado* de $\boldsymbol{v}$ con respecto a la base $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$

EJERCICIOS
ESPACIOS VECTORIALES

[1] Muestre que $R = \{ax - a,\ a \in \mathbb{R}\} \leq \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

Solución:

$i)$ $R \neq \emptyset$, pues $0x - 0 \in R$

$ii)$
Dados los vectores
$v_1 = a_1x - a_1 \in R$, con $a_1 \in \mathbb{R}$

$v_2 = a_2x - a_2 \in R$, con $a_2 \in \mathbb{R}$

se tiene que la suma

$v_1 + v_2 = a_1x - a_1 + a_2x - a_2 = (a_1 + a_2)x - (a_1 + a_2) \in R$

$iii)$ $\alpha \in \mathbb{R},\ v = ax - a,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v = \alpha(ax - a) = (\alpha a)x - (\alpha a) \in R$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se concluye que $R \leq \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ ❑

[2] Responda V (Verdadero) o F (Falso), **justificando todas sus respuestas.**

$a)$ $[a,\ -1, a] \in\ <\{[1, a, 0], [a, 0, 1], [0,\ -1, a]\}>$, con $a \in \mathbb{R}$ constante

$b)$ $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ es base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$
Justificación:
Recordemos que $dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n + 1$ y $B = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$ posee $n + 1$ elementos, por lo tanto, basta demostrar que B es $l.i.$

$cte\ \ x\ \ x^2 . \ . \ . \ . \ x^n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Lo anterior significa que B es $l.i.$, y luego base, es decir, es verdadera la proposición.❑

$c)$ Si $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / \, 3x - y + z = 0\}$, entonces $dim(S) = 2$

Justificación:

Mostremos que primer lugar que $S \leq \mathbb{R}^3$

Notemos que los elementos de S tienen la estructura $[x, y, y - 3x]$, porque $z = y - 3x$

$i)$ $S \neq \emptyset$, pues $[0, 0, 0] \in S$, $3(0) - (0) + (0) = 0$

$ii)$ Dados

$\boldsymbol{v}_1 = [a, b, b - 3a] \in S$

$\boldsymbol{v}_2 = [c, d, d - 3c] \in S$

se tiene que

$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = [a, b, b - 3a] + [c, d, d - 3c] = [a + c, b + d, (b + d) - 3(a + c)] \in S$

$iii)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} = [x, y, y - 3x] \Rightarrow \alpha \boldsymbol{v} = \alpha[x, y, y - 3x] = [\alpha x, \alpha y, \alpha y - 3\alpha x] \in S$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se tiene que $S \leq \mathbb{R}^3$

Obtengamos ahora una base para S.

$S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 / \, 3x - y + z = 0\} = \{[x, y, y - 3x]\}$

$= \{x[1, 0, -3] + y[0, 1, 1]\}$

Notamos que $B = \{[1, 0, -3], [0, 1, 1]\}$ es un conjunto que genera a S, pues todos los elementos de S se pueden escribir como combinación lineal de los elementos de B.
Veamos si B es $l.i.$
$\alpha_1[1, 0, -3] + \alpha_2[0, 1, 1] = [0, 0, 0] \Rightarrow$

$\alpha_1 = 0$
$\alpha_2 = 0$
$-3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow -3(0) + (0) = 0$

La solución del sistema anterior es $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, luego B es $l.i.$ y por lo tanto base de S. Finalmente $dim(S) = 2$, pues la dimensión de un espacio vectorial es el número de elementos de una base cualquiera. ❑

$d)$ $dim(S) > dim(T)$, donde $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / A$ es antisimétrica$\}$ y
$T = \{ax + ay + a,\ a \in \mathbb{R}\}$

$e)$ Si $\boldsymbol{a} = [1, 3, 5]$ y $\boldsymbol{b}$ es paralelo a $\boldsymbol{a}$, entonces $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

$f)$ $< \{[a, -a], [2, 3]\} > = \mathbb{R}^2$, con $a \neq 0$, constante

$g)$ Todo conjunto $l.i.$ de V es base de V, con V un espacio vectorial real

$h)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in < B >$, con $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

Justificación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ \alpha & 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\beta & 3\beta \\ 2\beta & 2\beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - 3\beta & 3\beta \\ \alpha + 2\beta & 2\alpha + 2\beta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$-\alpha - 3\beta = 1$
$3\beta = 1$
$\alpha + 2\beta = 1$

$2\alpha + 2\beta = 2$

De la segunda ecuación : $\beta = \frac{1}{3}$
De la tercera ecuación : $\alpha = 1 - 2\beta \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$
Reemplazando los valores anteriores en la primera ecuación : $-\alpha - 3\beta = 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \neq 1$

Esto muestra que el sistema no posee solución, y por lo tanto es imposible escribir la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores de B. ❑

$i)$ El conjunto $\{(2-x)(1+x^2), x^3 - 1,\ x(x+3) - 1\} \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es $l.i.$

$j)$ El conjunto $\{\|\boldsymbol{a}\|\,\boldsymbol{a}\,,\ <\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ con $\boldsymbol{a} = [1, 0, -1]$ y $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a}$

$k)$ $\{proy_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}\,,\ proy_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}\ \times 2\,\boldsymbol{i}\,,\ \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, si $\boldsymbol{a} = [1,1,1]$ y $\boldsymbol{b} = [0, -1, 2]$

$l)$ Si $\boldsymbol{a} = 3\,\widehat{\boldsymbol{i}} - 2\widehat{\boldsymbol{k}}$ y $\boldsymbol{b} = \widehat{\boldsymbol{j}} - 3\widehat{\boldsymbol{k}}$, entonces $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$

$m)$ $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \,|\,A\,| = 0\} \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Justificación:
Sea $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \,|\,A\,| = 0\}$

$i)$ $S \neq \emptyset$, pues $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in S$ porque $|\,A\,| = 0$

$ii)$ Notamos que S no es cerrado para la suma, pues

$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in S$ porque $|\,A\,| = 0$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} \in S$ porque $|\,B\,| = 0$, pero
$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \notin S$ porque $|\,A + B| = 32 - 77 = -45 \neq 0$

Lo anterior significa que S no es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ❑

$n)$ Si $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ es un conjunto linealmente independiente del espacio vectorial V, entonces $B = \{\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_1\}$ es linealmente dependiente.

$o)$ La matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, siempre se puede escribir como combinación lineal de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$p)$ El vector de coordenadas de $[1, 0, -1]$ con respecto a la base $\{[1,1,1], [-1,1,0], [0,0,1]\}$ es $[-1, 1, 2]$

[3] Muestre que si $p(x) = ax^2 + ax + a$, con $a \neq 0$, entonces $B = \left\{p(x), \frac{dp(x)}{dx}, \frac{d^2p(x)}{dx^2}\right\}$ es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

[4] Muestre que el conjunto de todas las matrices antisimétricas de orden 2 es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

[5] Obtenga en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un conjunto l.d. que no contenga a la matriz nula.

[6] Obtenga una base para $\mathbb{R}^3$ que incluya al vector $[1, -2, 0]$

[7] Determine un subconjunto de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que sea l.i. y que no sea base

[8] Determine un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, distinto de los subespacios triviales