UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

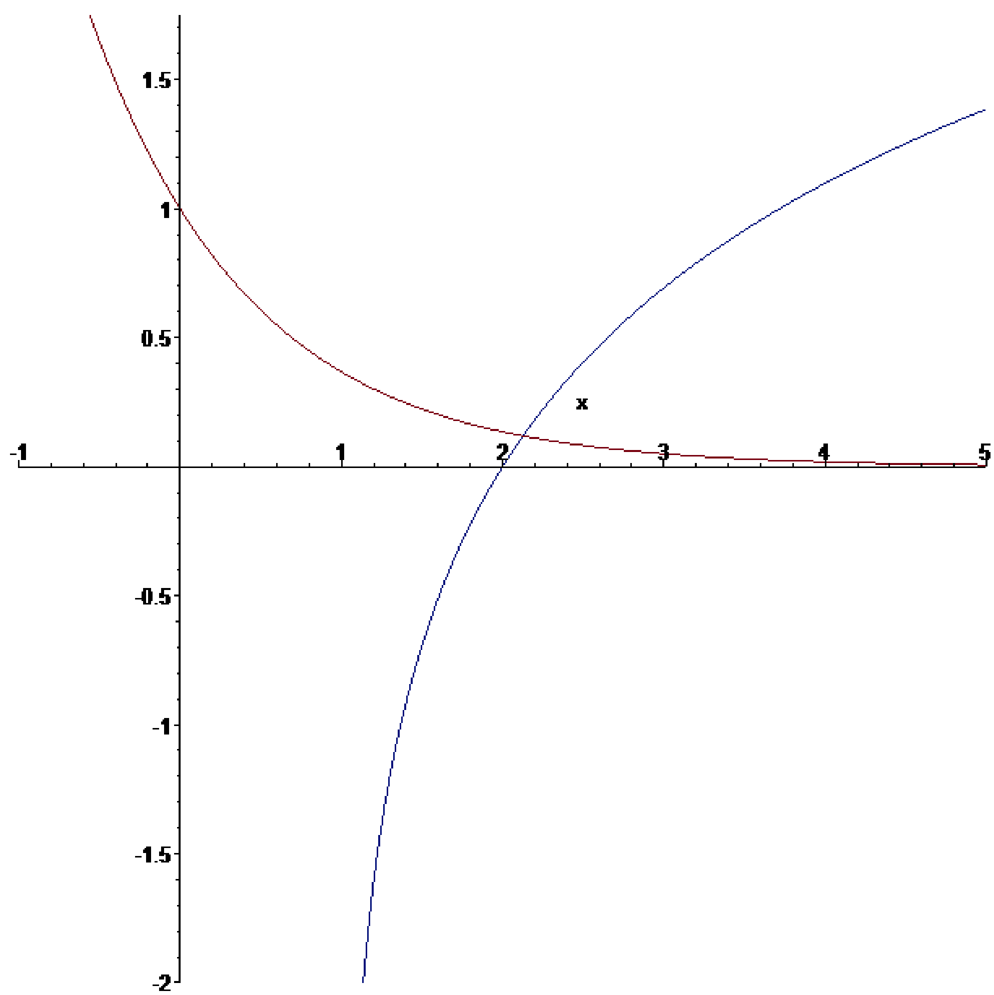
EJERCICIO CLASE Viernes 23 de Mayo de 2014
MÉTODOS NUMÉRICOS - CÁLCULO NUMÉRICO

Resuelva la ecuación $e^{-x} = ln(x-1)$

a) realizando 3 iteraciones de método de la bisección

b) utilizando la aproximación obtenida en a) para ser usada en el Método de Newton-Raphson Modificado con un error de 10^{-8}

Solución:
$a)$ Bosquejemos las funciones e^{-x} y $ln(x-1)$ en un mismo gráfico



Observemos que $f(x) = e^{-x} - ln(x-1)$
Notamos que un intervalo a considerar en el método de la bisección es $[2, 3]$. En efecto

$$f(2) = e^{-2} - ln(2-1) = e^{-2} - ln(1) = e^{-2} \approx 0.13 > 0$$

$$f(3) = e^{-3} - ln(3-1) = e^{-3} - ln(2) \approx\ -0.64 < 0$$

Iteración 1: $\;x_1 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

$$f(x_1) = e^{-2.5} - ln(2.5-1) = e^{-2.5} - ln(1.5) \approx\ -0.32 < 0$$

2	$x_1 = 2.5$	3
$+$	$-$	$-$

Iteración 2: $x_2 = \frac{2+2.5}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25$

$$f(x_2) = e^{-2.25} - ln(2.25-1) = e^{-2.25} - ln(1.25) \approx\ -0.11 < 0$$

2	$x_2 = 2.25$	2.5
$+$	$-$	$-$

Iteración 3: $x_3 = \frac{2+2.25}{2} = \frac{4.25}{2} = 2.125$

El valor aproximado obtenido usando el Método de la Bisección es $x_3 = 2.125$

b) Recordemos que la fórmula iterativa para el Método de Newton-Raphson Modificado es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\ f'(x_n)}{\Big[f'(x_n)\Big]^2 - f(x_n)\, f''(x_n)}$$

Verifiquemos la condición de convergencia en $x_0 = 2.125$

Recordemos que la condición de convergencia es

$$|\, g(x_0)\ g''(x_0)\,| < \Big[g'(x_0)\Big]^2$$

con $\;g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$

En el ejercicio se tiene que $f(x) = e^{-x} - ln(x-1)$.

Luego

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = e^{-x} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'''(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(x-1)^3}$$

Así

$$f(x_0) = f(2.125) \approx 0.0016499326$$

$$f'(x_0) = f'(2.125) \approx -1.0083218570$$

$$f''(x_0) = f''(2.125) \approx 0.9095564251$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$g'(x) = \frac{\left[f'(x)\right]^2 - f(x)\ f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

$$g''(x) =$$

$$\frac{\left[2\,f'(x)\ f''(x) - f'(x)\,f''(x) - f(x)\,f'''(x)\right]\left[f'(x)\right]^2 - \left[\left[f'(x)\right]^2 - f(x)\ f''(x)\right]\left[2\,f'(x)\ f''(x)\right]}{\left[f'(x)\right]^4}$$

Ahora

$$g(x_0) = g(2.125) \approx -0.001636315417$$

$$g'(x_0) = g'(2.125) \approx 0.9985239622$$

$$g''(x_0) = g''(2.125) \approx 0.9018600982$$

$$|\,(-0.001636315417)\,(0.9018600982\,| \approx 0.001475727583 <$$

$\left[g'(x_0)\right]^2 \approx 0.9970501031$

Observamos que se cumple la condición de convergencia.

Iteración $1\ (n=0)$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)\ f'(x_0)}{\left[f'(x_0)\right]^2 - f(x_0)\, f''(x_0)} \approx 2.125 + 0.001638734251 \approx 2.126638734$$

Error $= |x_1 - x_0| \approx 0.001638734251 > 10^{-8}$

Iteración $2\ (n=1)$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\ f'(x_1)}{\left[f'(x_1)\right]^2 - f(x_1)\, f''(x_1)} \approx$$

$2.126638734 - 0.1210228720 \times 10^{-5} \approx 2.126637524$

Error $= |x_2 - x_1| \approx 0.1210228720 \times 10^{-5} > 10^{-8}$

Iteración $3\ (n=2)$:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\ f'(x_2)}{\left[f'(x_2)\right]^2 - f(x_2)\, f''(x_2)} \approx$$

$2.126637524 - 0.19866423832 \times 10^{-9} \approx 2.126637524$

Error $= |x_3 - x_2| \approx 0.19866423832 \times 10^{-9} < 10^{-8}$

La solución aproximada final es $x_3 \approx 2.126637524$ ❑