UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

Ejercicios Resueltos Algebra Lineal
Enero de 2020

(1) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas.**

$a)$_V__ Si w y v son vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$, entonces $\|w \times v\|^2 + < v, w > ^2 = 1$
Justificación:
$\|w \times v\|^2 + < v, w > ^2 = \|w\|^2 \|v\|^2 sen^2(\alpha) + \|w\|^2 \|v\|^2 cos^2(\alpha) =$

$\|w\|^2 \|v\|^2 (sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)) = \|w\|^2 \|v\|^2 = 1^2 \cdot 1^2 = 1$ ❑

$b)$ ___F__ No existe vector en $\mathbb{R}^3$ que sea unitario y además perpendicular a $[1, -1, 3]$
Justificación:
Sea $\boldsymbol{w} = [1, 2, a]$ el vector perpendicular a $\boldsymbol{v} = [1, -1, 3]$

Luego :

$$< \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} > \; = \; < [1, 2, a], [1, -1, 3] > \; = 1 - 2 + 3a = 0 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto : $\boldsymbol{w} = \left[1, 2, \frac{1}{3}\right]$. Este vector no es unitario, y para lograr que lo sea debemos dividirlo por su norma.

$$\boldsymbol{w*} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} = \frac{[1,2,\frac{1}{3}]}{\|[1,2,\frac{1}{3}]\|} = \frac{[1,2,\frac{1}{3}]}{\sqrt{1+4+\frac{1}{9}}} = \frac{[1,2,\frac{1}{3}]}{\sqrt{\frac{46}{9}}} = \left[\frac{3}{\sqrt{46}}, \frac{6}{\sqrt{46}}, \frac{1}{\sqrt{46}}\right]$$

El vector $\boldsymbol{w*}$ es unitario y además perpendicular a $[1, -1, 3]$ ❑

$c)$___F__Si $\boldsymbol{a} = 3\,\widehat{\boldsymbol{i}} - 2\widehat{\boldsymbol{k}}$ y $\boldsymbol{b} = \widehat{\boldsymbol{j}} - 3\widehat{\boldsymbol{k}}$, entonces $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$
Justificación:
$\boldsymbol{a} = [3, 0, -2]$; $\boldsymbol{b} = [0, 1, -3]$; $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = [-3, 1, -1]$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=3\boldsymbol{k}+2\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}=[2,9,3]$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 9 & 3\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=-18\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-27\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{j}=-18\boldsymbol{i}+13\boldsymbol{j}-27\boldsymbol{k}=$$
$[-18,13,-27]$

Veamos si el conjunto $J=\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\}$ es base de $\mathbb{R}^3$. Primero notemos que J posee 3 elementos, número que coincide con la dimensión de $\mathbb{R}^3$, por esto sólo falta probar que J es $l.i.$; para ello calculemos el determinante de la matriz cuyas filas son los vectores de J.

$$\begin{vmatrix}3 & 0 & -2\\ -3 & 1 & -1\\ -18 & 13 & -27\end{vmatrix}=-81+78-36+39=0$$

Lo anterior significa que J no es $l.i.$, y por lo tanto no puede ser base de $\mathbb{R}^3$ ❑

$d)$__V___ Si $a=\alpha\, b$, con $a,b\in\mathbb{R}^3$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $b\times a=[0,0,0]$

Justificación:

$b\times a=b\times\alpha\, b=\alpha\,(b\times b)=\alpha\,[0,0,0]=[0,0,0]$ ❑

$e)$___V___ $R=\{ax-a,\ a\in\mathbb{R}\}\leq\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

Justificación:

$i)$ $R\neq\emptyset$, pues $0x-0\in R$

$ii)$

Dados los vectores

$v_1=a_1x-a_1\in R$, con $a_1\in\mathbb{R}$

$v_2=a_2x-a_2\in R$, con $a_2\in\mathbb{R}$

se tiene que la suma

$v_1+v_2=a_1x-a_1+a_2x-a_2=(a_1+a_2)x-(a_1+a_2)\in R$

$iii)$ $\alpha\in\mathbb{R},\ v=ax-a,\ a\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha v=\alpha(ax-a)=(\alpha a)x-(\alpha a)\in R$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se concluye que $R\leq\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ ❑

$f)$___V___ $\{1,x,x^2,x^3,....,x^n\}$ es base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$

Justificación:

Recordemos que $dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}))=n+1$ y $B=\{1,x,x^2,x^3,....,x^n\}$ posee $n+1$ elementos, por lo tanto, basta demostrar que B es $l.i.$

$$\begin{array}{l} \;\; cte \;\;\; x \;\;\; x^2 \; . \; . \; . \; . \;\; x^n \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \end{array}$$

Lo anterior significa que B es $l.i.$, y luego base $\square$

$g)$ ___V___ Si $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, 3x - y + z = 0\}$, entonces $dim(S) = 2$

Justificación:

Mostremos que primer lugar que $S \leq \mathbb{R}^3$

Notemos que los elementos de S tienen la estructura $(x, y, y-3x)$, porque $z = y - 3x$

$i)$ $S \neq \emptyset$, pues $(0,0,0) \in S$, $3(0) - (0) + (0) = 0$

$ii)$ Dados

$v_1 = (a, b, b-3a) \in S$

$v_2 = (c, d, d-3c) \in S$

se tiene que

$v_1 + v_2 = (a, b, b-3a) + (c, d, d-3c) = (a+c, b+d, (b+d) - 3(a+c)) \in S$

$iii)$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $v = (x, y, y-3x) \Rightarrow \alpha v = \alpha(x, y, y-3x) = (\alpha x, \alpha y, \alpha y - 3\alpha x) \in S$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se tiene que $S \leq \mathbb{R}^3$

Obtengamos ahora una base para S.

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, 3x - y + z = 0\} = \{(x, y, y-3x)\} = \{x(1,0,-3) + y(0,1,1)\}$$

Notamos que $B = \{(1,0,-3),(0,1,1)\}$ es un conjunto que genera a S, pues todos los elementos de S se pueden escribir como combinación lineal de los elementos de B.

Veamos si B es $l.i.$

$\alpha_1(1,0,-3) + \alpha_2(0,1,1) = (0,0,0) \Rightarrow$

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = 0$

$-3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow -3(0) + (0) = 0$

La solución del sistema anterior es $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, luego B es $l.i.$ y por lo tanto base de S. Finalmente $dim(S) = 2$, pues la dimensión de un espacio vectorial es el número de elementos de una base cualquiera. $\square$

$h)$ __V__ Sea **v** $\in \mathbb{R}^3$, **v** $\neq \theta$. Tenemos que si **u** es un vector cualquiera, entonces **u** $- \frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}>}{\|\mathbf{v}\|^2}$ **v** es ortogonal a **v**.

Justificación:

$$< \mathbf{u} - \frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}>}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \mathbf{v} > \; = \; < \mathbf{u}, \mathbf{v} > \; - \frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}>}{\|\mathbf{v}\|^2} < \mathbf{v}, \mathbf{v} > \; =$$

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > \; - \frac{<\mathbf{u},\mathbf{v}>}{\|\mathbf{v}\|^2} \|\mathbf{v}\|^2 =^{\mathbf{v}\neq\theta} < \mathbf{u}, \mathbf{v} > \; - \; < \mathbf{u}, \mathbf{v} > \; = 0 \;\square$$

$i)$ ___V___ El conjunto solución del sistema $3x - 2y + z = 0$; $4x + y + z = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$

Justificación:

Obtengamos en primer lugar el conjunto solución S del sistema.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & : & 0 \\ 4 & 1 & 1 & : & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow^{F_1(-4/3)+F_2} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & : & 0 \\ 0 & 11/3 & -1/3 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que $r_A = 2 = r_{A:b} < N = 3$, debemos fijar una $(3-2)$ incógnita. Fijemos la variable z

$$\frac{11}{3} y - \frac{1}{3} z = 0 \Rightarrow \frac{11}{3} y = \frac{1}{3} z \Rightarrow y = \frac{1}{11} z$$

$$3x - 2y + z = 0 \Rightarrow x = \frac{2y - z}{3} \Rightarrow x = \frac{2\left(\frac{1}{11} z\right) - z}{3} \Rightarrow x = \frac{\frac{2}{11} z - z}{3} \Rightarrow x = \frac{-\frac{9}{11} z}{3}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{11} z$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) / \begin{bmatrix} -\frac{3}{11} z \\ \frac{1}{11} z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Veamos si S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$

$i)$ $S \neq \emptyset$, pues $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in S$ (para $z = 0$)

$$ii)\ \begin{bmatrix} -\frac{3}{11}a \\ \frac{1}{11}\,a \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{11}b \\ \frac{1}{11}\,b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11}(a+b) \\ \frac{1}{11}\,(a+b) \\ (a+b) \end{bmatrix} \in S \quad (\text{con } a+b \in \mathbb{R})$$

$$iii)\ \alpha \begin{bmatrix} -\frac{3}{11}z \\ \frac{1}{11}\,z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{11}\alpha z \\ \frac{1}{11}\,\alpha z \\ \alpha z \end{bmatrix} \in S\,,\ z \in \mathbb{R}$$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$ se concluye que $S \leq \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ ❑

$j)$ ___V___ Las matrices simétricas de orden 2 siempre son ortogonales a las matrices antisimétricas de orden 2

Justificación:

$$< \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} > \ = traza\left(\begin{bmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \right)$$

$$= traza\left(\begin{bmatrix} -db & -dc \\ da & db \end{bmatrix} \right) = -db + db = 0, \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Lo anterior muestra que las matrices simétricas de orden 2 siempre son ortogonales a las matrices antisimétricas de orden 2 ❑

$k)$ ___V___ Los vectores propios de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ forman siempre una base para $\mathbb{R}^2$, si tales vectores son considerados como vectores fila.

Justificación:

Calculemos los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|\,A - \lambda I\,| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \tfrac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow \lambda = \tfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Calculemos los vectores propios

Para $\lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 2-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a - b = 0$$

$\Rightarrow^{Fijo\,a} \quad b = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

Finalmente, el primer vector propio (que en realidad es una infinidad de vectores propios) es:

$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)a \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

Para $\lambda_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & -1 \\ -1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & 2-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)c - d = 0$$

$\Rightarrow^{Fijo\,c} \quad d = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)c$, con $c \in \mathbb{R} - \{0\}$

Finalmente, el segundo vector propio (que en realidad es una infinidad de vectores propios) es:

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) c \end{bmatrix},\ \text{con}\ \ c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Veamos ahora si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ forman una base para $\mathbb{R}^2$, para ello falta probar que forman un conjunto $l.i.$ porque $dim(\mathbb{R}^2) = 2 = \#(B)$, donde $B = \left\{ \left[a, \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) a \right], \left[c, \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) c \right] \right\}$

$$\begin{vmatrix} a & \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) a \\ c & \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) c \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) ac - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) ac$$

$= -\frac{1}{2}\,ac + \frac{\sqrt{5}}{2}\,ac + \frac{1}{2}\,ac + \frac{\sqrt{5}}{2}\,ac = \sqrt{5}\,ac \neq 0$, porque $a \neq 0$ y $c \neq 0$

Lo anterior muestra que los vectores propios de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ forman siempre una base para $\mathbb{R}^2$, si tales vectores son considerados como vectores fila.

(2) Obtenga

$a)$ La longitud de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \|A\| = \sqrt{1+1+1+1+1+1} = \sqrt{6} \quad \square$$

$b)$ La distancia entre los vectores $[-1,2,4]$ y $[4,-1,2] \times [1,1,0]$

Solución:

$$[4,-1,2] \times [1,1,0] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = [-2,2,5]$$

$$d([-1,2,4]\,,\,[-2,2,5]) = \|[-2,2,5] - [-1,2,4]\| =$$

$$\|[-1,0,1]\| = \sqrt{2} \quad \square$$

$c)$ El producto interno entre $1+x-x^2$ y $3x^2-3$

Solución:

$$<1+x-x^2\,,\;\; 3x^2-3\;> \;=\; <1+x-x^2\,,\;\; -3+0x+\,3x^2\;> \;=$$

$$1(-3)+1(0)+(-1)(3)= -3-3= -6 \;\square$$

$d)$ Una base para $\mathbb{R}^3$ que incluya al vector $[\,1,\,-2,0\,]$

Solución:

El conjunto $B=\{[\,1,\,-2,0\,],\,[\,1,0,0\,],[\,0,0,1\,]\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ porque es un conjunto con 3 vectores y además l.i. pues $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ $\square$

$e)$ Un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que sea l.i. y ortonormal

Solución:

El conjunto $B=\{\,[\,1,0,0\,],\,[\,0,1,0\,],[\,0,0,1\,]\,\}\subseteq \mathbb{R}^3$ es un conjunto l.i. y además ortonormal porque es la base canónica. $\square$

$f)$ Un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

Solución:

El conjunto $S=\{[0,0]\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ porque es distinto de vacío (contiene al vector nulo), además $[\,0,0]+[\,0,0]=[\,0,0]\in S$ y finalmente $\alpha\,[\,0,0]=[\,0,0]\;\in S$ $\square$

(42 puntos).

(3) Verifique si $3\,\boldsymbol{u}+2\,\boldsymbol{v}$ y $2\,\boldsymbol{u}-3\,\boldsymbol{v}$ son vectores ortogonales, dado que $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores de un espacio vectorial V.

Solución:

Sean $\boldsymbol{u} = [1, -1]$ y $\boldsymbol{v} = [0,1]$ dos vectores de $V = \mathbb{R}^2$

Tenemos que

$$3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = [3, -3] + [0,2] = [3, -1]$$
$$2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} = [2, -2] - [0,3] = [2, -5]$$

Además

$$< 3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}\,,\, 2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v} > \;=\; < [3, -1]\,,\, [2, -5] > \;= 6 + 5 = 11 \neq 0$$

Lo anterior muestra que dados dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ de un espacio vectorial V se tiene que no necesariamente los vectores $3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$ y $2\boldsymbol{u} - 3\boldsymbol{v}$ son ortogonales ❑

(4) Verique si $B = \left\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ con $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 - \{[0,0,0]\}$

Solución:

Sean $\mathbf{a} = [1, -1, 0]$ y $\mathbf{b} = [2, -2, 0]$ dos vectores de $\mathbb{R}^3 - \{[0,0,0]\}$

Dado que **b** es múltiplo escalar de **a** se tiene que el conjunto $B = \left\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})\right\}$ no puede ser l.i., porque al armar el determinante con estos vectores una fila será múltiplo escalar de otra y eso significa que el determinante correspondiente es cero.

Al no ser l.i. el conjunto B, no puede ser base. ❑

(5) Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el poducto interior habitual. Obtenga :

$a)$ dos vectores unitarios y ortogonales
$b)$ dos vectores distintos de igual longitud
$c)$ una base no canónica para V
$d)$ dos vectores paralelos
$e)$ un conjunto $l.i.$ con dos elementos

(20 puntos).

Solución:

$a)\, \boldsymbol{a} = [1,0,0]$ y $\boldsymbol{b} = [0,1,0]$
Unitarios: $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{1+0+0} = 1$ y $\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{1+0+0} = 1$
Ortogonales: $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} > \; = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ ❑

$b)$ Los vectores de la parte $a)$ sirven porque $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ y $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$

$c)$ $B = \{[1,0,1],[0,1,1],[1,1,0]\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, porque $dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \#(B)$ y además

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0,$$ por lo que B es $l.i.$

Notemos que B es distinta de la base canónica $\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]\}$ ❑

$d)$ $\boldsymbol{c} = [1,2,1]$ es paralelo a $\boldsymbol{d} = [2,4,2]$ porque $\boldsymbol{d} = 2\,\boldsymbol{c}$ ❑

$e)$ $\{[1,-1,0],[2,0,1]\}$ es un conjunto $l.i.$ con dos elementos, porque

$\alpha_1[1,-1,0] + \alpha_2[2,0,1] = [0,0,0] \Rightarrow [\alpha_1, -\alpha_1, 0] + [2\alpha_2, 0, \alpha_2] = [0,0,0]$

$\Rightarrow [\alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_1, \alpha_2] = [0,0,0] \Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0\,; \; -\alpha_1 = 0\,; \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0\,; \alpha_2 = 0$ ❑