

Teoría

T 23 La *derivada de una función f en un número k* , denotada $f'(k)$ y que se lee " f prima en k ", es

$$f'(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+h) - f(k)}{h}$$

si el límite existe.

La expresión anterior se puede escribir también

$$f'(k) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x) - f(k)}{x - k}$$

Notemos que $f'(k)$ es un número real.

T 24 La *función derivada de f* , denotada f' , está dada por :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

T 25 Otras notaciones para la derivada de f son :

$$f'(x) \equiv y' \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv Df(x) \equiv D_x f(x)$$

bajo el supuesto de que $y = f(x)$.

Por otro lado

$$f'(k) \equiv \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=k} \equiv \left. \frac{dy}{dx} \right]_{x=k}$$

T 26 Una función f es *derivable en k* si $f'(k)$ existe. La función es *derivable en un intervalo abierto* (a, b) ó $(a, +\infty)$ ó $(-\infty, a)$ ó $(-\infty, +\infty)$ si es derivable en cada punto o número del intervalo.

T 27 Si la derivada $f'(k)$ existe, entonces f es continua en $x = k$.

T 28 Si $f'(k)$ existe, entonces la *recta tangente* a la curva de ecuación $y = f(x)$ en $x = k$ es

$$y - f(k) = f'(k)(x - k)$$

Si $f'(k)$ existe y además $f'(k) \neq 0$, entonces la *recta normal* a la curva de ecuación $y = f(x)$ en $x = k$ es

$$y - f(k) = -\frac{1}{f'(k)}(x - k)$$

T 29 Fórmulas de derivación.

Suponga en lo que sigue que f y g son funciones derivables y que c es constante.

a) Si f es una función constante, es decir, $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$

b) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow f'(x) = \text{cos}(x)$

d) $f(x) = \text{cos}(x) \Rightarrow f'(x) = -\text{sen}(x)$

e) $f(x) = \text{tg}(x) \Rightarrow f'(x) = \text{sec}^2(x)$

f) $f(x) = \text{cotg}(x) \Rightarrow f'(x) = -\text{cosec}^2(x)$

g) $f(x) = \text{sec}(x) \Rightarrow f'(x) = \text{sec}(x)\text{tg}(x)$

h) $f(x) = \text{cosec}(x) \Rightarrow f'(x) = -\text{cosec}(x)\text{cotg}(x)$

i) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

j) $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

k) $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$, $a > 0$.

l) $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$

m) $f(x) = \text{Arcsen}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

n) $f(x) = \text{Arccos}(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

o) $f(x) = \text{Arctg}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$p) f(x) = \operatorname{Arccotg}(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$q) f(x) = \operatorname{Arcsec}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$r) f(x) = \operatorname{Arccosec}(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$s) (f+g)'(x) = [f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

$$t) (f-g)'(x) = [f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$$

$$u) (cf)'(x) = (cf(x))' = c f'(x)$$

$$v) (f \cdot g)'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$w) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$$

▮ 30 Regla de la cadena.

Si las derivadas $g'(x)$ y $f'(g(x))$ existen, y $F = f \circ g$ es la función compuesta definida por $F(x) = f(g(x))$, entonces $F'(x)$ existe y está dada por

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Usando la notación de Leibniz, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Para derivar una función compuesta debemos derivar la función externa f evaluada en la función interna g , por la derivada de la función interna g .

▮ 31 Derivación implícita.

Algunas funciones son definidas implícitamente por una ecuación que relaciona las variables dependiente e independiente, para tales funciones es posible usar derivación implícita para obtener la derivada de la variable dependiente con respecto a la independiente. Para lograr tal objetivo se derivan, usando la regla de la cadena, ambos miembros de la ecuación que define la relación funcional, despejando finalmente la derivada.

La derivación implícita se usa preferentemente cuando es difícil o imposible despejar la variable dependiente (habitualmente y) en términos de la variable independiente (habitualmente x).

▮ 32 Derivadas de orden superior.

Es posible derivar la función derivada, es decir, calcular $\left[f'(x)\right]'$, llamada la segunda derivada de f y denotada $f''(x)$ ó $f^{(2)}(x)$ ó $\frac{d^2f}{dx^2}$

Notemos que $f^{(2)}(x)$ y $\frac{d^2f}{dx^2}$ son sólo notaciones para representar la segunda derivada.

De modo similar a lo señalado se puede calcular la derivada de la segunda derivada, la derivada de la tercera derivada, y así sucesivamente, obteniéndose derivadas llamadas de orden superior.