Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería Agrícola

ALGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES

Juan Carlos Sandoval Avendaño

Edición Noviembre de 2010.

1 MATRICES

Matrices

Una matriz es un arreglo, distribución, acomodación o disposición rectangular de elementos ubicados en filas y en columnas.

En la definición anterior ¿qué significa arreglo rectangular?. Significa que los elementos, habitualmente números, los disponemos o acomodamos en filas y columnas.

Por ejemplo, si tengo los siguientes cuatro números : $1,\ 3,\ -1$ y 6 los puedo acomodar así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

generando lo que se conoce como *matriz cuadrada* (igual número de filas que de columnas) de orden 2 (tenemos 2 filas y 2 columnas). Las filas son las horizontales y las columnas son las verticales.
También podríamos haber usado las siguientes estructuras, donde los números en la parte inferior conforman el *orden* (número de filas $\times$ número de columnas).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}_{4\times 1} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}_{1\times 4}$$

Notemos que la secuencia en que disponemos los números también genera nuevas matrices. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2 distinta a la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.

El orden de una matriz es el número de filas por el número de columnas y se escribe $m \times n$ indicando que la matriz posee m filas y n columnas.
Si $m = n$, entonces la matriz se dice *cuadrada*; en caso contrario se habla habitualmente de matriz *rectangular*.

Los elementos de una matriz pueden ser números reales o complejos.

Es común denotar las matrices con letras mayúsculas, por ejemplo, A, B, I, etc. , y sus elementos con letras minúsculas a las que se le añaden dos subíndices, por ejemplo, $a_{i\,j}$, $b_{k\,t}$, etc.

Los subíndices sirven para especificar la ubicación del elemento en la matriz, por ejemplo, a_{14} denota el elemento que está en la fila 1 y en la columna 4; en general, $a_{i\,j}$ representará el elemento que está en la fila i y en la columna j.

Si queremos escribir en forma general una matriz que conste de 2 filas y 2 columnas lo hacemos de la siguiente manera :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

que se puede abreviar $A = (\,a_{i\,j})\,_{2\times 2}\,,$ o en forma compacta $A = (a_{i\,j})_2$ o sin indicar el numero de filas y de columnas $A = (a_{i\,j})$

Una matriz general de orden $m \times n$ se escribe como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notemos que al escribir las matrices anteriores hemos usado indistintamente los paréntesis redondos $(\,)$ o cuadrados $[\,]$ para encerrar los elementos de una matriz.

Ejemplo 1. Escriba:
$a)$ un ejemplo de matriz de orden 2×3 cuyos elementos sean números reales.

$b)$ un ejemplo de matriz cuadrada de orden 2 cuyos elementos sean números complejos.

Solución:
$a)$ Un ejemplo de matriz de orden 2×3 con elementos reales puede ser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$b)$ Un ejemplo de matriz cuadrada de orden 2 con elementos complejos puede ser

$$B = \begin{bmatrix} i & 0 \\ -i & 1+3i \end{bmatrix} \square$$

En una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_n$ los elementos de la *diagonal principal* son aquellos que tienen la forma a_{ii}, con $i = 1, 2, ..., n$; y los elementos de la *diagonal secundaria* son aquellos que tienen la forma $a_{i\ n+1-i}$, con $i = 1, 2, ..., n$. Los elementos que no están en la diagonal principal se denominan *elementos extradiagonales* y son aquellos que tienen la forma a_{ij} con $i \neq j$.

Esquemáticamente para una matriz general de orden 3, los elementos de la diagonal principal y de la diagonal secundaria se muestran a continuación:

Diagonal Principal

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundaria

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Se define el conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ como el formado por todas las matrices de orden $m \times n$ cuyos elementos son números reales o complejos. Si $m = n$, entonces el conjunto se denota $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notemos que $\mathbb{K}$ representa el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ o el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. Los elementos de $\mathbb{K}$ se denominan *escalares*.

Ejemplo 2. Escriba los elementos de las matrices $A=(a_{i\,j})_{2\times 3}$ y $B=(b_{i\,j})\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definidas como:

$$a_{i\,j}=\begin{cases} 1 & \text{, si } i=j \\ \frac{1}{i-j} & \text{, si } i\neq j \end{cases}$$

$$b_{i\,j}=(-1)^{i+j}$$

__**Solución:**__

La matriz A es de orden 2×3 y la escribiremos en forma general para determinar cuáles son sus elementos, pues éstos dependen de los índices i y j.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1-2} & \frac{1}{1-3} \\ \frac{1}{2-1} & 1 & \frac{1}{2-3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz B es cuadrada de orden 3 y para obtener sus elementos la escribiremos en forma general.

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\ \square$$

Álgebra Matricial

A1) Igualdad de Matrices. Dos matrices son iguales si sus órdenes son iguales y si sus elementos correspondientes son iguales, es decir, si $A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B=(b_{i\,j})\in\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, entonces $A=B$ sí y sólo si $m=p$, $n=q$ y $a_{i\,j}=b_{i\,j}$, para $i=1,2,\ldots,m$ y $j=1,2,\ldots,n$

Dos matrices A y B no son iguales, lo que se denota $A\neq B$, si sus órdenes no son iguales o si alguno de sus elementos correspondientes no son iguales.

A2) Suma de Matrices. Sean $A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B=(b_{i\,j})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se define la *suma de la matriz* A *con la matriz* B como la matriz denotada $A+B$ y dada por:

$$A+B=(\,a_{i\,j}+b_{i\,j})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Es decir, para obtener la suma de dos matrices del mismo orden es necesario sumar los elementos de la primera matriz con los correspondientes de la segunda matriz.

Ejemplo 3. Calcule $A+B$ para

$a)\ A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$

$b)\ A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 5 & i & 1-i\end{bmatrix}$ y $B=[1 \quad -i \quad 1+i]$

Solución:

$$a)\ A+B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} -1+1 & 3+(-1) & 0+2 \\ 1+2 & -1+(-1) & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ A+B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ para $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$b)$ La matriz A es cuadrada de orden 3 y la matriz B es de orden 1×3, luego de acuerdo a la definición de suma de matrices es imposible sumar dos matrices que tengan órdenes distintos.

En definitiva, $A+B$ no existe con $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & i & 1-i \end{bmatrix}$ y $B = [1 \quad -i \quad 1+i]$ ❑

Propiedades de la Suma de Matrices

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

S1) Conmutativa

$$A+B = B+A$$

S2) Asociativa

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

S3) Elemento neutro aditivo

Existe una matriz Θ de orden $m \times n$, llamada nula definida posteriormente, tal que:

$$A+\Theta = \Theta + A = A$$

S4) Elemento opuesto

Existe una matriz $-A \equiv (-1)\,A$ de orden $m \times n$, llamada opuesta de A, tal que:

$$A+(-A) = (-A)+A = \Theta$$

A3) Producto por escalar. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Se define el *producto de una matriz* A *por un escalar* α como la matriz denotada $\alpha \cdot A$ y dada por:

$$\alpha \cdot A = (\alpha\, a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Es decir, para obtener el producto de una matriz por un escalar es necesario multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar considerado.

Ejemplo 4. Calcule $-5 \cdot A$ con $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

$$-5 \cdot A = -5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)(-1) & (-5)(3) & (-5)(0) \\ (-5)(1) & (-5)(-1) & (-5)(0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -15 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \square$$

Propiedades del Producto por Escalar

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $\beta \in \mathbb{K}$

PE1) Asociativa respecto del producto por escalares

$$(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$$

PE2) Conmutativa

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$$

PE3) Distributiva respecto de la suma de matrices

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

PE4) Distributiva respecto de la suma de escalares

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

A4) Resta o Diferencia de Matrices. Sean $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se define la ***resta de la matriz*** A ***con la matriz*** B como la matriz denotada $A-B$ y dada por:

$$A-B=A+(-1)B=(a_{ij}-b_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Es decir, debemos multiplicar cada elemento de B por el escalar -1 y luego los elementos de esta matriz resultante se suma con los elementos correspondientes de A, o de forma más directa a los elementos de A se le restan los correspondientes de B.

Ejemplo 5. Calcule $A-B$ para

$a)\ A=\begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} -a & a \\ -a & a \end{bmatrix}$

$b)\ A=(1\quad 2\quad i)$ y $B=(-1\quad 2\quad i-1)$

<u>Solución:</u>

$a)\ A-B=\begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix} -a & a \\ -a & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix} 2a & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore\ A-B=\begin{bmatrix} 2a & -2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ para $A=\begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} -a & a \\ -a & a \end{bmatrix}$

$b)\ A-B=(1\quad 2\quad i)+(-1)(-1\quad 2\quad i-1)=$

$(1\quad 2\quad i)+(1\quad -2\quad -i+1)=(2\quad 0\quad 1)$

$\therefore\ A-B=(2\quad 0\quad 1)$ para $A=(1\quad 2\quad i)$ y $B=(-1\quad 2\quad i-1)$ ❑

A5) Producto de Matrices. Sean $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ y $B = (b_{i\,j}) \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Se define el *producto de la de la matriz* A *por la matriz* B como la matriz $C = (c_{i\,j}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, denotada $A \cdot B$, y dada por:

$$c_{i\,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i\,k}\, b_{k\,j}$$

$i = 1, 2, ..., m\,;\; j = 1, 2, ..., n$

La fórmula anterior nos dice que para calcular el elemento que está en la fila i y en la columna j de la matriz producto debemos multiplicar los elementos de la fila i de la primera matriz con los correspondientes de la columna j de la segunda matriz y luego sumar todos estos productos.

El producto de dos matrices existe cuando el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda; en caso contrario se dice que el producto no existe o que no es posible calcularlo.

El orden de la matriz producto es el número de filas de la primera matriz por el número de columnas de la segunda matriz.

Si en el producto $A \cdot B$ la matriz A es igual a la matriz B, se tiene la potencia $A \cdot B = A^2 = A \cdot A$. De forma similar se define la potencia A^3 que es $A^2 \cdot A$.
La potencia $k-$ésima de una matriz cuadrada A, con $k \in \mathbb{N}$, es el producto de A por sí misma k veces, es decir,

$$A^k = \overbrace{A \cdot A \cdot \;....\; \cdot A}^{k\,veces}$$

Ejemplo 6. Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$ para

$a)\; A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$b)\; A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix}$

Solución:

$a)$ La matriz A es de orden 3×2 y la matriz B es de orden 2×3, luego el número de columnas de A, que es 2, coincide con el número de filas de B y es posible calcular $A \cdot B$ que será cuadrada de orden 3.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1)(1)+(-1)(1) & (1)(-4)+(-1)(1) & (1)(3)+(-1)(1) \\ (2)(1)+(4)(1) & (2)(-4)+(4)(1) & (2)(3)+(4)(1) \\ (3)(1)+(5)(1) & (3)(-4)+(5)(1) & (3)(3)+(5)(1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -4-1 & 3-1 \\ 2+4 & -8+4 & 6+4 \\ 3+5 & -12+5 & 9+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 6 & -4 & 10 \\ 8 & -7 & 14 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 6 & -4 & 10 \\ 8 & -7 & 14 \end{bmatrix}$ para $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora al calcular BA nos damos cuenta que el número de columnas de B es 3 y el número de filas de A es 3, por lo que es posible calcular BA que será cuadrada de orden 2.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1)(1)+(-4)(2)+(3)(3) & (1)(-1)+(-4)(4)+(3)(5) \\ (1)(1)+(1)(2)+(1)(3) & (1)(-1)+(1)(4)+(1)(5) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-8+9 & -1-16+15 \\ 1+2+3 & -1+4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$b)$ En este ejercicio notamos que A es cuadrada de orden 2 y B es de orden 1×2, luego al intentar calcular $A \cdot B$ nos damos cuenta que el número de columnas de A, que es 2, no coincide con el número de filas de B, que es 1, por lo que el producto $A \cdot B$ no existe. En cambio, al intentar calcular $B \cdot A$ notamos que el número de columnas de B, que es 2, coincide con el número de filas de A, además el orden de $B \cdot A$ será 1×2.

Calculemos el producto $B \cdot A$:

$$B \cdot A = [\,3 \quad -4\,] \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [\,(3)(3) + (-4)(1) \quad (3)(2) + (-4)(0)\,] =$$

$$[\,9 - 4 \quad 6 + 0\,] = [\,5 \quad 6\,]$$

$\therefore\ B \cdot A = [\,5 \quad 6\,]$ para $B = [\,3 \quad -4\,]$ y $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ❑

Propiedades del Producto de Matrices

Sean A, B y C matrices de órdenes apropiados de modo que los productos que se mencionan a continuación existan, y sea α un escalar en $\mathbb{K}$

P1) Asociativa

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

P2) Distributiva respecto de la suma de matrices

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$$

P3) Movilidad de un escalar en un producto de matrices

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\alpha \cdot B) = (A \cdot B) \cdot \alpha$$

P4) No conmutatividad

En general, el producto de matrices no es conmutativo, es decir

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Cuando $A \cdot B = B \cdot A$, se dice que las *matrices conmutan*.

Tipos de Matrices

M1) Matriz Nula. Una matriz rectangular se dice *nula*, y se denota Θ ó $\Theta_{m\times n}$, si todos sus elementos son iguales a cero. Es decir, $A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es nula sí y sólo si $a_{i\,j}=0$, para cada $i=1,2,...,m$ y para cada $j=1,2,...,n$

Ejemplo 6. Escriba las matrices nulas de orden 2×3 y de orden 3.

Solución:

La matriz nula de orden 2×3 es $\Theta=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

La matriz nula de orden 3 es $\Theta=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ❑

M2) Matriz Idéntica o Identidad. Una matriz cuadrada de orden n es idéntica o identidad o unidad, y se denota I_n o simplemente I, si los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1 y los elementos extradiagonales son todos ceros. Es decir, $A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es idéntica sí y sólo si $a_{i\,j}=\begin{cases}1 & \text{, si } i=j\\0 & \text{, si } i\neq j\end{cases}$

Ejemplo 7. Escriba las matrices idénticas de orden 2 y de orden 3.

Solución:

La matriz idéntica de orden 2 es $I_2\equiv I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

La matriz idéntica de orden 3 es $I_3\equiv I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ❑

M3) Matriz Fila. Una matriz rectangular se dice *matriz fila* si consta de una sola fila, no importando el número de columnas. Es decir, $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz fila sí y sólo si $m = 1$.

Ejemplo 8. Escriba dos ejemplos de matrices fila.

Solución:
El primer ejemplo de matriz fila puede ser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 1×3 y los elementos son números reales.

El segundo ejemplo de matriz fila:

$$B = \begin{pmatrix} i+1 \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 1×1 y el elemento es un número complejo. ❑

M4) Matriz Columna. Una matriz rectangular se dice *matriz columna* si consta de una sola columna, no importando el número de filas. Es decir, $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz columna sí y sólo si $n = 1$.

Ejemplo 9. Escriba dos ejemplos de matrices columna.

Solución:
El primer ejemplo de matriz columna puede ser:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En este caso el orden es 3×1 y los elementos son números reales; además podemos decir que A es nula.

El segundo ejemplo de matriz columna:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 2×1 y los elementos son números reales. ❑

A una matriz fila se le denomina habitualmente *vector fila* y a una matriz columna se le denomina habitualmente *vector columna*.

M5) Matriz Diagonal. Una matriz cuadrada se dice *matriz diagonal* si los elementos extradiagonales son todos iguales a cero. Es decir, $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz diagonal sí y sólo si $a_{i\,j} = 0$, para $i \neq j$.

Ejemplo 10. Escriba dos ejemplos de matrices diagonales.

__Solución:__
El primer ejemplo de matriz diagonal es:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & i-2 \end{bmatrix}$$

En este caso el orden es 3×3 y los elementos son números complejos.

El segundo ejemplo de matriz diagonal es:

$$D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 2×2 y los elementos son números reales. ❑

M6) Matriz Escalar. Una matriz cuadrada se dice *matriz escalar* si los elementos extradiagonales son todos iguales a cero y los elementos de la diagonal prinicpal son todos iguales a una constante k. Es decir, $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz escalar sí y sólo si $a_{i\,j} = \begin{cases} k & \text{, si } i = j \\ 0 & \text{, si } i \neq j \end{cases}$

Ejemplo 11. Escriba dos ejemplos de matrices escalares.

<u>**Solución:**</u>
El primer ejemplo de matriz escalar es:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En este caso el orden es 3×3 , los elementos son números reales y el escalar considerado es $k = 3$.

El segundo ejemplo de matriz escalar es:

$$D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 2×2 , los elementos son números reales y el escalar considerado es $k = -1$. ❑

M7) Matriz Triangular. Existen dos tipos de matrices triangulares: las inferiores y las superiores.
$a)$ Una matriz cuadrada se dice *matriz triangular inferior* si los elementos que están sobre la diagonal principal son todos iguales a cero. Es decir, $A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular inferior sí y sólo si $a_{i\,j}=0$ para $i<j$.

Otra definición que es muy útil en programación es:
$A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular inferior sí y sólo si $a_{i\,j}=0$ para $i=1,2,...,n-1\,;\;j=i+1,i+2,....,n$

$b)$ Una matriz cuadrada se dice *matriz triangular superior* si los elementos que están bajo la diagonal principal son todos iguales a cero. Es decir, $A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular superior sí y sólo si $a_{i\,j}=0$ para $i>j$.

Otra definición que es muy útil en programación es:
$A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una matriz triangular superior sí y sólo si $a_{i\,j}=0$ para $j=1,2,...,n-1\,;\;i=j+1,j+2,....,n$

Ejemplo 12. Escriba un ejemplo de matriz triangular inferior y otro de matriz triangular superior.

<u>**Solución:**</u>
Una matriz triangular inferior puede ser:

$$T=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

En este caso el orden es 3 , los elementos son números reales y también puede ser concebida como matriz triangular superior.

Una matriz triangular superior puede ser:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$$

En este caso el orden es 2 y los elementos son números reales. ❑

M8) Matriz Tridiagonal. Una matriz A=$(a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice tridiagonal sí y sólo si $a_{i\,j} = 0$, para $|i - j| \geq 2$.

Ejemplo 13. Escriba, en forma general, la matriz tridiagonal de orden 4 con elementos reales.

<u>**Solución:**</u>
La matriz tridiagonal general de orden 4 es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

con $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ a_{32}, a_{33},\ a_{34}, a_{43}, a_{44} \in \mathbb{R}$ ❑

M9) Matriz Traspuesta. Sea $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. La traspuesta de A, denotada A^T (o también A' o A^t), está dada por $A^T = (a_{j\,i}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Es decir, para obtener la traspuesta de una matriz se cambian en forma ordenada las filas por columnas, y por ende las columnas se transforman en las correspondientes filas.

Ejemplo 14. Obtenga la traspuesta de las siguientes matrices

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$b)\ B = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}$$

Solución:

$a)$ En este caso la matriz es de orden 3×2, por lo tanto la traspuesta tendrá orden 2×3.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Notemos que la primera columna de la matriz A es la primera fila de la matriz A^T, y la segunda columna de la matriz A es la segunda fila de la matriz A^T.

$b)$ En este ejercicio la matriz B es cuadrada con elementos reales y de orden 3, por lo tanto B^T también será cuadrada de orden 3.

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ a & 0 & a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que B^T coincide con B; cuando sucede esto estamos frente a una matriz llamada simétrica, que definiremos luego. ❑

Propiedades de la Traspuesta

Sean A y B matrices de órdenes apropiados de modo que todos los resultados mencionados existan, y sea α un escalar.

T1) $(A^T)^T = A$

T2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

T3) $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

T4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

M10) Matriz Conjugada y Conjugada Traspuesta. Sea $A=(a_{i\,j})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. La conjugada de A, denotada $\overline{A}$ está dada por $\overline{A}=(\overline{a_{i\,j}})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Es decir, para obtener la conjugada de una matriz de elementos complejos se calculan los conjugados de cada uno de los elementos de la matriz.
La matriz conjugada traspuesta, denotada A^*, se define como:

$$A^*=\left(\overline{A}\right)^T$$

Ejemplo 15. Obtenga la conjugada de las siguientes matrices

$$a)\; A=\begin{bmatrix} i-1 & -3+2i \\ 5 & 1+i \\ \frac{1}{i} & i \end{bmatrix}$$

$$b)\; B=\begin{pmatrix} \frac{5-i}{1-i} & 0 & 1-i \\ i & i^3 & 4 \\ 1 & 2 & i-1 \end{pmatrix}$$

<u>**Solución:**</u>

$a)$ En este caso la matriz es de orden 3×2, y sabemos que la conjugada tendrá el mismo orden.

Para calcular la conjugada es necesario escribir todos los números complejos en la forma binómica, es decir, en la forma $a+b\,i$, porque el conjugado $a-bi$ se obtiene directamente.

Tenemos que:

$$A=\begin{bmatrix} i-1 & -3+2i \\ 5 & 1+i \\ \frac{1}{i} & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1+i & -3+2i \\ 5+0i & 1+i \\ \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} & 0+i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1+i & -3+2i \\ 5+0i & 1+i \\ \frac{i}{i^2} & 0+i \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} -1+i & -3+2i \\ 5+0i & 1+i \\ -i & 0+i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1+i & -3+2i \\ 5+0i & 1+i \\ 0-i & 0+i \end{bmatrix}$$

Luego

$$\overline{A} = \overline{\begin{bmatrix} -1+i & -3+2i \\ 5+0i & 1+i \\ 0-i & 0+i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \overline{-1+i} & \overline{-3+2i} \\ \overline{5+0i} & \overline{1+i} \\ \overline{0-i} & \overline{0+i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-i & -3-2i \\ 5-0i & 1-i \\ 0+i & 0-i \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1-i & -3-2i \\ 5 & 1-i \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -1-i & -3-2i \\ 5 & 1-i \\ i & -i \end{bmatrix}$$

para

$$A = \begin{bmatrix} -1+i & -3+2i \\ 5 & 1+i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

$b)$ En este ejercicio la matriz B es cuadrada de orden 3, por lo tanto la conjugada de B también será cuadrada de orden 3.

Usando un procedimiento análogo al del ejercicio de la parte $a)$ se tiene que:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5-i}{1-i} & 0 & 1-i \\ i & i^3 & 4 \\ 1 & 2 & i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5-i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} & 0 & 1-i \\ i & i^2 \cdot i & 4 \\ 1 & 2 & i-1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5+4i-i^2}{1-i^2} & 0 & 1-i \\ i & (-1) \cdot i & 4 \\ 1 & 2 & i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5+4i+1}{1+1} & 0 & 1-i \\ i & -i & 4 \\ 1 & 2 & i-1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{6+4i}{2} & 0+0i & 1-i \\ 0+i & 0-i & 4+0i \\ 1+0i & 2+0i & i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2i & 0+0i & 1-i \\ 0+i & 0-i & 4+0i \\ 1+0i & 2+0i & -1+i \end{pmatrix}$$

$$\overline{B} = \overline{\begin{pmatrix} 3+2i & 0+0i & 1-i \\ 0+i & 0-i & 4+0i \\ 1+0i & 2+0i & -1+i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{3+2i} & \overline{0+0i} & \overline{1-i} \\ \overline{0+i} & \overline{0-i} & \overline{4+0i} \\ \overline{1+0i} & \overline{2+0i} & \overline{-1+i} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3-2i & 0-0i & 1+i \\ 0-i & 0+i & 4-0i \\ 1-0i & 2-0i & -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2i & 0 & 1+i \\ -i & i & 4 \\ 1 & 2 & -1-i \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 3-2i & 0 & 1+i \\ -i & i & 4 \\ 1 & 2 & -1-i \end{pmatrix}$$

para

$$B = \begin{pmatrix} 3+2i & 0 & 1-i \\ i & -i & 4 \\ 1 & 2 & -1+i \end{pmatrix} \quad \square$$

Propiedades de la Conjugada y Conjugada Traspuesta

Sean A y B matrices de órdenes apropiados de modo que todos los resultados mencionados existan, y sea α un escalar.

C1) $\overline{(\overline{A})} = A$

C2) $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$

C3) $\overline{(\alpha \cdot A)} = \overline{\alpha} \cdot \overline{A}$

C4) $\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

CT1) $(A^*)^* = A$

CT2) $(A+B)^* = A^* + B^*$

CT3) $(\alpha \cdot A)^* = \overline{\alpha} \cdot A^*$

CT4) $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$

M11) Matriz Simétrica. Una matriz cuadrada de elementos reales se dice simétrica si su traspuesta coincide con ella. Es decir, A es simétrica sí y sólo si

$$A^T = A$$

Otra definición útil en programación es:

$A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica sí y sólo si $a_{i\,j} = a_{j\,i}$, para i distinto de j, con $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$

Ejemplo 16. Verifique si las siguientes matrices son simétricas.

$a)\ A = (\,1 \quad -1\,)$

$b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$c)\ C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Solución:</u>

$a)$ En este caso la matriz es de orden 1×2 y la simetría es una característica reservada exclusivamente a las matrices cuadradas, por lo tanto, no tiene sentido hablar de simetría al trabajar con matrices no cuadradas.

$b)$ En este ejercicio la matriz B es cuadrada de orden 2 y notamos que $b_{12} = -2 = b_{21}$, por lo tanto B es simétrica.

$c)$ En este caso la matriz es cuadrada de orden 3, pero $c_{12} = -1 \neq 2 = c_{21}$. Luego C no es simétrica. ❑

M12) Matriz Hermítica o Hermitiana. Una matriz cuadrada A de elementos complejos se dice hermitiana si su conjugada traspuesta coincide con ella. Es decir, A es hermitiana sí y sólo si

$$A = \left(\overline{A}\right)^T$$

Otra definición útil en programación es:

$A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es hermitiana sí y sólo si todos los elementos de la diagonal principal son complejos reales y además $a_{i\,j} = \overline{a}_{j\,i}$, para i distinto de j, con $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$

Ejemplo 17. Verifique si las siguientes matrices son hermitianas.

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

$$b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 2 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Solución:</u>

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A} = \overline{\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{A}\right)^T = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix} = A$$

Finalmente concluimos que A no es hermitiana.

$$b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 2 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1+i \\ i & 2 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{B}\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1+i \\ i & 2 & 1-i \\ 1-i & 1+i & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 2 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 4 \end{bmatrix} = B$$

Finalmente observamos que B es hermitiana. ❑

M13) Matriz Antisimétrica. Una matriz cuadrada de elementos reales se dice antisimétrica si su traspuesta coincide con la opuesta de ella, esto significa que los elementos de la diagonal principal deben ser todos cero y los elementos extradiagonales correspondientes tienen el mismo valor excepto por una diferencia de signo. Es decir, A es antisimétrica sí y sólo si

$$A^T = -A$$

Otra definición útil en programación es:

$A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es antisimétrica sí y sólo si $a_{i\,i} = 0$, $i = 1, 2, ..., n$ y $a_{i\,j} = -a_{j\,i}$, para i distinto de j, con $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$

Ejemplo 18. Verifique si las siguientes matrices son antisimétricas.

$a)\; A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$b)\; B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$c)$ La matriz nula de orden 3

Solución:

$a)$ En este caso la matriz es de orden 2 y observamos que $a_{11} = 2 \neq 0$, esto muestra que A no es antisimétrica.
Otra manera de mostrar lo mismo es calcular A^T y compararla con $-A$:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

$b)$ En este ejercicio la matriz B es cuadrada de orden 3 y notamos que todos los elementos de la diagonal principal son ceros y que $b_{12} = a = -b_{21}$, $b_{13} = 0 = -b_{31}$, $b_{23} = 0 = -b_{32}$, por lo tanto B es antisimétrica.
Otra manera de mostrar lo mismo es calcular B^T y compararla con $-B$:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

$c)$ En este caso la matriz es cuadrada de orden 3 y se cumple que $\Theta^T = -\Theta$, por lo que la matriz nula de orden 3 es antisimétrica. ❑

M14) Matriz Antihermítica o Antihermitiana. Una matriz cuadrada de elementos complejos se dice antihermitiana si su conjugada traspuesta coincide con la opuesta de ella. Es decir, A es antihermitiana sí y sólo si

$$\left(\overline{A}\right)^T = -A$$

Otra definición útil en programación es:

$A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es antihermitiana sí y sólo si los elementos de la diagonal principal son imaginarios puros y $a_{i\,j} = -\overline{a}_{j\,i}$, para i distinto de j, con $i = 1, 2, ..., n\,;\ j = 1, 2, ..., n$

Ejemplo 19. Verifique si las siguientes matrices son antihermitianas.

$$a)\ A = \begin{bmatrix} i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{bmatrix}$$

$$b)\ B = \begin{bmatrix} 3-i & i & 1-i \\ -i & -4i & -1-i \\ 1+i & 1-i & -4 \end{bmatrix}$$

<u>Solución:</u>

$$a)\ A=\begin{bmatrix} i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{A}=\overline{\begin{bmatrix} i & -1-i \\ 1-i & -3i \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix} -i & -1+i \\ 1+i & 3i \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{A}\right)^T=\begin{bmatrix} -i & -1+i \\ 1+i & 3i \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} -i & 1+i \\ -1+i & 3i \end{bmatrix}=-A$$

Finalmente concluimos que A es antihermitiana.

$$b)\ B=\begin{bmatrix} 3-i & i & 1-i \\ -i & -4i & -1-i \\ 1+i & 1-i & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{B}=\begin{bmatrix} 3+i & -i & 1+i \\ i & 4i & -1+i \\ 1-i & 1+i & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left(\overline{B}\right)^T=\begin{bmatrix} 3+i & -i & 1+i \\ i & 4i & -1+i \\ 1-i & 1+i & -4 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 3+i & i & 1-i \\ -i & 4i & 1+i \\ 1+i & -1+i & -4 \end{bmatrix}\neq$$

$$\begin{bmatrix} -3+i & -i & -1+i \\ i & 4i & 1+i \\ -1-i & -1+i & 4 \end{bmatrix}=-B$$

Luego B no es antihermitiana. ❑

M15) Matriz Involutiva. Una matriz cuadrada de elementos en $\mathbb{K}$ se dice involutiva si su cuadrado coincide con la idéntica del mismo orden. Es decir, A es involutiva sí y sólo si

$$A^2=I$$

Ejemplo 20. Obtenga dos ejemplos de matrices involutivas de orden 2.

<u>Solución:</u>

Sea $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz cualquiera de orden 2 con elementos reales.

Tenemos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{bmatrix}$$

Luego

$$A^2 = I \ \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a^2+bc &= 1 && (1) \\ ab+bd &= 0 && (2) \\ ac+dc &= 0 && (3) \\ cb+d^2 &= 1 && (4) \end{aligned}$$

De la ecuación (2) se tiene que:

$$b(a+d) = 0 \Rightarrow b = 0 \ \vee \quad a = \, -d$$

Supongamos en lo que sigue que $b = 0$.

Reeplazando $b = 0$ en la ecuación (1):

$$a^2 + (0)(c) = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \ \vee \quad a = \, -1$$

Reemplazando $b = 0$ en la ecuación (4):

$$(c)(0) + d^2 = 1 \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1 \ \vee \quad d = \, -1$$

Notemos que de la ecuación (3) se tiene:

$$c\,(a+d) = 0 \Rightarrow c = 0 \ \vee \quad a = \, -d$$

Lo anterior muestra que podemos elegir por ejemplo:

$b = 0\,,\ a = 1,\ d = \, -1$ y c cualquier valor.

Por lo tanto dos matrices involutivas pueden ser:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Observemos que

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad ❑$$

M16) Matriz Idempotente. Una matriz cuadrada de elementos en $\mathbb{K}$ se dice idempotente si su cuadrado coincide con ella misma. Es decir, A es idempotente sí y sólo si

$A^2 = A$

Ejemplo 21. Obtenga cuatro ejemplos de matrices idempotentes de orden 2.

<u>Solución:</u>

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ una matriz de orden 2 con elementos reales. Esta estructura inicial es absolutamente arbitraria, esto significa que podemos elegir otra estructura para comenzar a trabajar.

Tenemos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = a \qquad (1)$$
$$2ab = b \qquad (2)$$

De (2) se tiene que:
$2ab - b = 0 \Rightarrow b(2a-1) = 0 \Rightarrow b = 0 \;\vee\; a = \frac{1}{2}$

Si reemplazamos $b=0$ en la ecuación (1) se tiene que:

$$a^2+0=a \Rightarrow a^2=a \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow a=0 \quad \vee \quad a=1$$

De estos resultados obtenemos dos matrices:

$$A_1=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo anterior nos dice que la matrices nula e idéntica son idempotentes.

Por otro lado, si reemplazamos $a=\frac{1}{2}$ en la ecuación (1) se tiene que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4} \Rightarrow b^2=\frac{1}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

De los resultados anteriores se obtiene que:

$$A_3=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Finalmente podemos decir que cuatro ejemplos de matrices idempotentes pueden ser:

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\Theta_2$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I_2$$

$$A_3=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \square$$

M17) Matriz Nilpotente. Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice ***nilpotente de índice*** k si existe un número natural k, que es el menor posible, tal que $A^k = \Theta_n$

Ejemplo 22. Obtenga un ejemplo de matriz de orden 2 nilpotente de índice 2, distinta de la nula.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ una matriz de orden 2. Notemos que esta estructura inicial es arbitraria, esto significa que podemos elegir una estructura diferente para comenzar a trabajar.

Tenemos que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \Theta_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ ab+bc & b^2+c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = 0 \qquad (1)$$
$$ab + bc = 0 \qquad (2)$$
$$b^2 + c^2 = 0 \qquad (3)$$

De (1) se tiene que:

$$a^2 = -b^2 \Rightarrow a = \pm bi$$

De (2) se tiene que:

$$b(a+c) = 0 \Rightarrow b = 0 \;\vee\; c = -a$$

De lo anterior concluimos que una matriz nilpotente con $k = 2$ puede ser:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\,i & b \\ b & -\,b\,i \end{bmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

En particular una matriz nilpotente de índice $k = 2$ es : $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & -\,i \end{bmatrix}$ ❑

M18) Matriz Periódica. Una *matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice *periódica de periodo* k si existe un número natural k, que es el menor posible, tal que $A^k = A$

Ejemplo 23. Obtenga dos ejemplos de matrices de orden 2 periódicas de periodo $3,$ distintas de la nula.

Solución:

La matriz idéntica de orden 2 es una matriz peródica de periodo $3,$ pues

$$I_2^3 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Además la matriz $-\,I_2$ es periódica de periodo 3 pues

$$(-\,I_2)^3 = (-\,1)^3 I_2^3 = -\,I_2$$

Finalmente los dos ejemplos de matrices periódicas de periodo 3, distintas de la nula, son:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad -\,I = \begin{bmatrix} -\,1 & 0 \\ 0 & -\,1 \end{bmatrix}$$ ❑

Matriz Inversa

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se define la *inversa de* A, denotada A^{-1}, como la única matriz tal que:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

con $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A^{-1} existe se dice que A es invertible, inversible, no singular, no degenerada o regular.

Ejemplo 24.
Calcule las inversas de

$a)\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, con $ad - bc \neq 0$

$b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$c)\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>Solución:</u>

$a)$ Usando la definición tenemos que si $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, entonces

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} ax + bz &= 1 && (1) \\ ay + bw &= 0 && (2) \\ cx + dz &= 0 && (3) \\ cy + dw &= 1 && (4) \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación (1) por $-c$ y la ecuación (3) por a se tiene que:
$-ca\,x - cb\,z = -c$
$ac\,x + ad\,z = 0$

Sumando las ecuaciones anteriores:

$(ad - bc)\,z = -c \Rightarrow z = \frac{-c}{ad-bc}$, con $ad - bc \neq 0$.

Reemplazando el valor de z recién calculado en (3) se tiene que:

$c\,x = -d\,z \Rightarrow x = \frac{-d}{c}\,z \Rightarrow x = \frac{-d}{c}\,\frac{-c}{ad-bc} \Rightarrow x = \frac{d}{ad-bc}$

Multiplicando la ecuación (2) por $-c$ y la ecuación (4) por a se tiene que:

$-ac\,y - bc\,w = 0$
$ac\,y + ad\,w = a$

Sumando las ecuaciones anteriores se tiene que:

$(ad - bc)\,w = a \Rightarrow w = \frac{a}{ad-bc}$

Reemplazando este resultado en (2):

$ay + bw = 0 \Rightarrow a\,y = -b\,w \Rightarrow y = -\frac{b}{a}\,w \Rightarrow y = -\frac{b}{a}\,\frac{a}{ad-bc} \Rightarrow y = \frac{-b}{ad-bc}$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Finalmente podemos decir que:

$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \text{ con } ad - bc \neq 0}$$

El resultado recién obtenido nos permite calcular la inversa de una matriz cualquiera de orden 2 que cumpla con la condición $ad - bc \neq 0$.
¿Qué sucede si $ad - bc = 0$?. En ese caso la inversa no existe, y si no existe la inversa no tiene sentido calcularla, por lo que siempre se debe calcular

primero el número $ad - bc$, y si es distinto de cero podemos aplicar la fórmula anterior.

$b)$ Para calcular la inversa de $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ usaremos la fórmula obtenida en el ejercicio anterior.
Notemos que: $a = 1,\ b = -1,\ c = 3$ y $d = 2.$
Luego

$$ad - bc = 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

En este caso vemos que es posible calcular la inversa de B.

$$B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

¿Es posible verificar si la inversa calculada recién está correcta?.
La respuesta es afirmativa. Si pensamos en la definición de inversa notamos que $B \cdot B^{-1}$ debe ser igual a la idéntica de orden 2.

$$B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\ \frac{6}{5} - \frac{6}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto muestra que la inversa que calculamos es correcta.

$c)$ Notemos que para $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ se tiene que $ad - bc = 1 - 1 = 0,$ por tal motivo podemos decir que C^{-1} no existe. ❑

Propiedades de la Inversa

Sean A y B matrices cuadradas de orden n invertibles con elementos reales, y α un escalar real.

Inv1) A^{-1} es única.

Inv2) $(A^{-1})^{-1} = A$

Inv3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Inv4) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Inv5) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, con $\alpha \neq 0$

Inv6) A triangular $\Rightarrow A^{-1}$ triangular
A diagonal $\Rightarrow A^{-1}$ diagonal
A simétrica $\Rightarrow A^{-1}$ simétrica
A antisimétrica $\Rightarrow A^{-1}$ antisimétrica

Operaciones Elementales

El calcular inversas de orden 3 o superior usando la definición se torna un proceso largo y poco práctico, porque por ejemplo, para calcular la inversa de una matriz de orden 4 debemos resolver un sistema de 16 ecuaciones y 16 incógnitas. Un método mucho mejor es mediante el uso de operaciones elementales.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se definen las siguientes tres *operaciones elementales sobre filas* (también se pueden definir usando columnas, pero no lo consideraremos):

(1) *Intercambiar o permutar las filas i y j de A.* Esto se escribe $F_{ij}(A)$, o F_{ij} cuando quede claro con respecto a qué matriz se está realizando la operación elemental. Notemos que : $F_{ij}(A) = F_{ji}(A)$

Ejemplo 25.

Obtenga $F_{21}(A)$ y $F_{13}(F_{12}(A))$ si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Solución:</u>

Calculemos en primer lugar $F_{21}(A)$, es decir, debemos intercambiar las filas 1 y 2 de A.

$$F_{21}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora calculemos $F_{13}(F_{12}(A))$, recordando que $F_{21}(A) = F_{12}(A)$.

$$F_{13}(F_{12}(A)) = F_{13}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \square$$

(2) *Multiplicar la fila i de A por un escalar no nulo k.* Esto se escribe $F_i(k)(A)$, o $F_i(k)$ cuando quede claro con respecto a qué matriz se está realizando la operación elemental.

Ejemplo 26.

Obtenga $F_2(-2)(A)$ y $F_3(\frac{1}{2})(A)$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculemos $F_2(-2)(A)$

$$F_2(-2)(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ (-2)(2) & (-2)(0) & (-2)(0) & (-2)(-1) \\ 4 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ahora, para calcular $F_3(\frac{1}{2})(A)$ multiplicamos cada elemento de la fila 3 de A por $\frac{1}{2}$ para obtener:

$$F_3(\tfrac{1}{2})(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \square$$

(3) *Multiplicar la fila i de A por un escalar no nulo k y sumar el resultado a la fila j* . Esto se escribe $(F_i(k) + F_j)(A)$, ó $F_i(k) + F_j$. Es común escribir $F_j = F_i(k) + F_j$ para dejar claramente establecido que la nueva fila j es la fila i multiplicada por el escalar k sumada a la antigua fila j.

Ejemplo 27.

Obtenga $(F_2(-2)+F_1)(A)$ y $(F_3(\frac{1}{2})+F_2)(A)$ si $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos $(F_2(-2)+F_1)(A)$. Para ello multiplicamos los elementos de la fila 2 de A por el escalar -2 y el resultado se lo sumamos a los elementos correspondientes de la fila 1 de A.

$$(F_2(-2)+F_1)(A)=\begin{bmatrix} 1+(0)(-2) & -1+(0)(-2) & 2+(1)(-2) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ahora, para calcular $(F_3(\frac{1}{2})+F_2)(A)$ multiplicamos cada elemento de la fila 3 de A por $\frac{1}{2}$ y los resultados se suman con los elementos correspondientes de la fila 2 para obtener:

$$(F_3(\tfrac{1}{2})+F_2)(A)=\begin{bmatrix} 1+(0)(\frac{1}{2}) & -1+(2)(\frac{1}{2}) & 2+(-4)(\frac{1}{2}) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$ ❑

Cálculo de la inversa mediante operaciones elementales

La pregunta ahora es: ¿De qué modo voy a usar las operaciones elementales para calcular la inversa de una matriz cuadrada de orden superior?.

Primero necesitamos saber cuándo dos matrices son equivalentes.

Sean $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Las *matrices* A y B se dicen *equivalentes*, lo que se denota $A\sim B$, si una puede ser obtenida de la otra mediante operaciones elementales.

Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ es equivalente a $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ porque B se puede obtener de A multiplicando la segunda fila de A por $\frac{1}{3}$; o también se puede decir que A se obtiene de B multiplicando la segunda fila de B por 3.

En segundo lugar necesitamos conocer qué es una matriz ampliada.

> Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$. La matriz $(\, A \mid B \,)$ de orden $m \times (n+p)$ se denomina *matriz ampliada* y está formada por las columnas de A a las que se les agrega al final las columnas de B

Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -9 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, entonces la matriz ampliada es

$$(\, A \mid B \,) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 5}$$

Ahora, para calcular la inversa de una matriz cuadrada A mediante operaciones elementales debemos hacer uso del siguiente teorema:

$$\boxed{(\, A \mid I \,) \sim (\, I \mid A^{-1} \,)}$$

donde I representa la matriz idéntica del mismo orden de A.

Lo anterior significa que partimos con la matriz ampliada $(\, A \mid I \,)$ y mediante operaciones elementales intentamos generar la matriz idéntica donde está la matriz A y a la par efectuamos las mismas operaciones sobre la idéntica, si el proceso llega a su término tendremos donde estaba la matriz A a la idéntica y donde estaba la idéntica tendremos la inversa de A. Además, si el proceso no es posible finalizarlo significará que la inversa no existe.

Ejemplo 28.

Calcule la inversa de las siguientes matrices usando operaciones elementales

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

$b)\; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$c)\; C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

<u>**Solución:**</u>

$a)$ La matriz ampliada $(\, A \mid I \,)$ en este caso es

$$(\, A \mid I \,) \;=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Transformemos la matriz A en la matriz idéntica mediante operaciones elementales y efectuemos al mismo tiempo las mismas operaciones elementales sobre la idéntica de orden 3.

$$(\, A \mid I \,) \;=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^{F_{23}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim^{F_2(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim^{F_3(2)+F_2\,;\,F_3(-2)+F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim^{F_2(1)+F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

De lo anterior concluimos que $A^{-1} \;= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Siempre es posible comprobar que el resultado obtenido es el correcto multiplicando la matriz dada por la inversa calculada lo que debe dar la idéntica. En efecto

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \square$$

$b)$ Para $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ se tiene que la ampliada es:

$$(B \mid I) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^{F_1(-2)+F_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim^{F_2(-1/3)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] \sim^{F_2(-2)+F_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

De lo anterior se concluye que $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Comprobemos que el resultado obtenido es el correcto.

$$B^{-1} \cdot B = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \square$$

$c)$ La matriz ampliada $(C \mid I)$ en este caso es

$$(C \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Debemos, mediante operaciones elementales, obtener la idéntica donde aparece la matriz C, y a la vez debemos realizar las mismas operaciones elementales sobre la idéntica.

$$(C \mid I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim^{F_1(1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim_{F_1(-1)+F_2;\,F_1(-3)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & | & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 9/2 & | & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim_{F_2(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 9/2 & | & -3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim_{F_2(-3/2)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

En este punto observamos que la tercera fila se ha hecho igual a la nula, esto muestra que es imposible transformar la matriz C en la idéntica como se pretendía; a partir de esto podemos decir que la inversa de C no existe o de forma equivalente la matriz C no posee inversa. ❑

2 DETERMINANTES

Determinantes

El determinante de una matriz cuadrada $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, denotado $|\,A\,|$ ó $det(A)$, es un número real o complejo que se obtiene de la siguiente manera:

$$|\,A\,| = \begin{cases} a_{11} & , \text{ si } n = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i\,j}\; c_{i\,j} & , \text{ si } n \geq 2, \text{ para algún } i \text{ desde } 1 \text{ hasta } n \end{cases}$$

donde $c_{i\,j} = (\,-\,1)^{i+j}\,|\,A_{i\,j}|$, con $A_{i\,j}$ la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i – ésima y la columna j – ésima.

A la definición anterior es necesario agregar algunos comentarios importantes :
$a)$ Si la matriz posee elementos reales, entonces el determinante de tal matriz será un número real, y de forma similar si la matriz posee elementos complejos, entonces su determinante será un número complejo.

$b)$ El valor que asume i en la definición es elegido de tal manera que el cálculo del determinante sea "más sencillo", es decir, elegiremos una fila con una mayor cantidad de ceros, si es que la hay; o una fila en donde aparezcan números enteros con los cuales sea fácil multiplicar. Si no observamos una fila que sea más fácil de trabajar que otra elegimos cualquiera.
Notemos que no importando la fila elegida el valor del determinante siempre es el mismo para una matriz dada.

$c)$ Los números $c_{i\,j}$ se denominan *cofactores*.

Ejemplo 1.

Calcule, usando la definición, el determinante de las siguientes matrices :

$a)\ A = (\,-4\,)$

$b)\ \ B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$c)\ H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a, b, c,\ d\ \in \mathbb{R}$

$d)\, G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$e)\, J = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -i \end{bmatrix}$, con i la unidad imaginaria.

Solución:

$a)\ A = (\,-4\,)$

En este caso $n = 1$ y por tanto usamos la rama superior de la definición.

$|\,A\,| = a_{11} = \,-4$

No confundir el determinante de una matriz con el valor absoluto de un número real, aunque sus notaciones sean iguales. Esta es la razón porque algunos prefieren usar la notación $det(A)$ en vez de $|\,A\,|$, pero si tenemos claro qué representa el argumento no nos confundiremos.

$b)\ B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

En este caso $n = 2,$ por lo que debemos usar la rama inferior de la definición.

$$|\,B\,| = \sum_{j=1}^{2} a_{i\,j}\;\; c_{i\,j}$$

En este punto debemos elegir una fila para calcular el determinante, pero como no existe diferencia entre ambas filas optemos por trabajar el determinante usando la primera fila, es decir, $i = 1.$

$$|\,B\,| = \sum_{j=1}^{2} a_{1\,j}\;\; c_{1\,j}\; = a_{11}\, c_{11} + a_{12}\, c_{12} \qquad (*)$$

Calculemos los cofactores.

$$c_{11} = (\,-\,1)^{1+1}\,|\,B_{11}\,| = |\,1\,| = 1$$

$$c_{12} = (\,-\,1)^{1+2}\,|\,B_{12}\,| = \,-\,|\,2\,| = \,-\,2$$

Reemplazando estos valores en la expresión $(*)$ se tiene que :

$$|\,B\,| = a_{11}\, c_{11} + a_{12}\, c_{12} = 1\cdot 1 + (\,-\,3)\cdot(\,-\,2) = 1 + 6 = 7$$

Finalmente : $|\,B\,| = 7$ ❑

$c)\; H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\;;\; a, b, c,\, d\, \in \mathbb{R}$

Usemos la segunda fila para calcular el determinante, es decir, $i = 2\,.$
(Como ejercicio calcule el determinante usando la primera fila).

$$|\,H\,| = \sum_{j=1}^{2} h_{2\,j}\;\; c_{2\,j}\; = h_{21}\, c_{21} + h_{22}\, c_{22} \qquad (**)$$

Calculemos los cofactores :

$$c_{21} = (\,-\,1)^{2+1}\,|\,H_{21}\,| = \,-\,|\,b\,| = \,-\,b$$

$$c_{22} = (\,-\,1)^{2+2}\,|\,H_{22}\,| = |\,a\,| = a$$

Reemplazando estos valores en la expresión $(**)$ se tiene que :

$$|\,H\,| = h_{21}\, c_{21} + h_{22}\, c_{22} = c\cdot(\,-\,b) + d\cdot a = ad - bc$$

Finalmente : $|\,H\,| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Lo anterior muestra que para calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 se deben multiplicar los elementos de la diagonal principal y a tal resultado restarle el producto de los elementos de la diagonal secundaria. ❑

$d)\; G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

En este caso $n = 3$. Por otro lado, elegiremos la tercera fila $(i = 3)$ porque aparece un 0 en la posición $(3, 2)$, esto redundará en que no deberemos calcular el cofactor c_{32} porque cualquier número multiplicado por cero es cero.

$$|\,G\,| = \sum_{j=1}^{3} g_{3\,j}\;\; c_{3\,j} \;= g_{31}\,c_{31} + g_{32}\,c_{32} + g_{33}c_{33} = 3\,c_{31} + 0\,c_{32} + 3\,c_{33} =$$

$$3\,c_{31} + 3\,c_{33} \qquad (***)$$

Calculemos los cofactores :

$$c_{31} = (-1)^{3+1}\,|\,G_{31}\,| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}\,|\,G_{33}\,| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

Reemplazando los valores de los cofactores en la expresión $(***)$ se tiene que :

$$|\,G\,| = \;3\,c_{31} + 3\,c_{33} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$ ❑

$e)\;\; J = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -\,i \end{bmatrix}$, con i la unidad imaginaria.

De la parte $c)$ de este ejercicio sabemos que $|\,H\,| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Luego, usando la fórmula anterior, se tiene que :

$$|\,J\,| = \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & -\,i \end{vmatrix} = 1 \cdot (\,-\,i) - i \cdot i = \,-\,i - i^2 = \,-\,i - (\,-\,1) = 1 - i$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & -\,i \end{vmatrix} = 1 - i$ ❏

Regla de Sarrus

Ya sabemos cómo calcular el determinante de una matriz de orden 2, pero ¿cómo se calcula el determinante de una matriz de orden 3?

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, entonces

$$|\,A\,| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

¿No existirá una forma más fácil de calcular el determinante de una matriz de orden tres?. Mi memoria es muy mala, requiero mucho tiempo para recordar mi nombre, ¿cómo esperan que recuerde la fórmula anterior?. Para aquellos que tienen mala memoria existe un método que espero les ayude, tal método se llama *regla de Sarrus*.

Bueno, Pedrito Sarrus notó que si repetía las dos primeras columnas de la matriz al final de ésta obtenía lo siguiente

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

¿Y qué pasó?. Lo que pasa es que con esto obtenemos tres diagonales principales (aquellas que van desde la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha) y tres diagonales secundarias (aquellas que van desde la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda). Gráficamente:

Tres diagonales principales

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}
$$

Tres diagonales secundarias

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}
$$

¿Y qué hago ahora?. Si miramos la definición dada al inicio observamos que los productos de los elementos de las diagonales principales coinciden con los productos que van con signo positivo, y los productos de los elementos de las diagonales secundarias coinciden con los productos que van con signo negativo. Y esa es precisamente la regla de Sarrus.

En resumen, la regla de Sarrus dice: adiciona a la matriz cuadrada de orden 3 las primeras dos columnas al final de la matriz, y luego multiplica los elementos de las diagonales, manteniendo el signo de los productos de las diagonales principales y cambiando el signo de los productos de las diagonales secundarias. Finalmente, el determinante de la matriz dada es la suma de todos los productos obtenidos.

Es importante recordar que la regla de Sarrus sirve sólo para matrices de orden 3.

Ejemplo 2.

Use la regla de Sarrus para calcular el determinante de la matriz

$$
J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

<u>Solución:</u>

Repitamos las dos primeras columnas de la matriz al final de ésta.

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\
0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Veamos cuáles son las diagonales principales :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

La suma de los productos, en este caso, es:

$$P_p = (1)(2)(-1) + (-1)(3)(1) + (2)(0)(0) = -2 - 3 = -5$$

Las diagonales secundarias :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

La suma de los productos de las diagonales secundarias es:

$$P_s = -(2)(2)(1) - (1)(3)(0) - (-1)(0)(-1) = -4$$

Luego el determinante de la matriz J es

$$|J| = P_p + P_s = -5 + (-4) = -9$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9$ ❑

Propiedades del Determinante

Sean A y B matrices cuadradas de orden n con elementos reales, y α un escalar real.

Det1) $|A| = |A^T|$

El determinante de una matriz y de su traspuesta son iguales.

Det2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

El determinante de un producto de matrices es igual al producto del determinante de cada uno de los factores.

Det3) $B = F_{i\,j}(A) \Rightarrow |\,B\,| = \,-\,|\,A\,|$

Si hacemos un intercambio de filas (o de columnas) en una matriz, entonces su determinante cambia de signo.

Det4) $B = F_i\,(\alpha)(A) \Rightarrow |\,B\,| = \alpha\;|\,A\,|\,,$ con $\alpha \neq 0$

Si multiplicamos una fila (o una columna) en una matriz por un escalar no nulo, entonces el determinante de la matriz resultante debe ser multiplicado por el mismo escalar.

Det5) $B = (F_i\,(\alpha) + F_j)(A) \Rightarrow |\,B\,| = |\,A\,|\,,$ con $\alpha \neq 0$

Si multiplicamos una fila (o una columna) de una matriz por un escalar no nulo y el resultado se lo sumamos a otra fila (o columna) de la misma matriz, entonces el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de la matriz original.

Det6) $A = (a_{i\,j})$ triangular $\Rightarrow |\,A\,| = \prod_{i=1}^{n} a_{i\,i} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \;\cdot\; \cdot a_{nn}$

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Det7) $|\,\alpha \cdot A\,| = \,\alpha^n\,|\,A\,|\,,$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

El determinante de una matriz multiplicada por un escalar es igual al escalar elevado al orden de la matriz por el determinante de la matriz original.

Det8) Si una matriz posee una fila (o una columna) nula, entonces su determinante es cero.

Det9) Si una matriz posee dos filas (o columnas) iguales, entonces su determinante es cero.

Det10) Si una matriz posee una fila (o una columna) que es múltiplo escalar de otra fila (o columna), entonces su determinante es cero.

Det11) A^{-1} existe $\Leftrightarrow$ $|\,A\,| \neq 0$

La inversa de una matriz existe sí y sólo si su determinante es distinto de cero.

Det12) $|\,A^{-1}\,| = \frac{1}{|\,A\,|}$, para $|\,A\,| \neq 0$

El determinante de la inversa de una matriz es igual al inverso multiplicativo del determinante de la matriz original, siempre que tal determinante sea distinto de cero para asegurar la existencia de la inversa.

Ejemplo 3.

Obtenga los siguientes determinantes :

$$a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$b)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$c)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$d)\begin{vmatrix} 3\,cos(\alpha) & 3\,sen(\alpha) \\ -3\,sen(\alpha) & 3\,cos(\alpha) \end{vmatrix}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

<u>**Solución:**</u>

$a)$ Para calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ podríamos haber ocupado la regla de Sarrus, pero si observamos bien nos damos cuenta que la segunda fila es igual a la primera multiplicada por 2, y de acuerdo a la propiedad **Det10)** concluimos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ❑

$b)$ En el caso del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ observamos que la tercera columna es nula, por tanto, usando la propiedad **Det8)**, se tiene que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ❑

$c)$ Para calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ usaremos operaciones elementales para trasformar la matriz original en una matriz triangular. Notemos que la matriz es de orden 4 y por tanto no se puede ocupar la regla de Sarrus.

Triangularicemos para después calcular el determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(-2)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(-3)+F_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-5)+F_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-7)+F_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-2)+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Como hemos ocupado solamente operaciones elementales del tercer tipo (multiplicar una fila por un escalar no nulo y sumar el resultado a otra fila), entonces el determinante de la matriz original es igual al determinante de la matriz triangular.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1(-1)(-16)(10) = 160$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 160$

El método usado en este ejercicio para calcular el determinante es usado comúnmente cuando se trabaja con matrices de orden superior, es decir, con matrices de orden 4 hacia arriba. ❑

$d)$ $\begin{vmatrix} 3\,cos(\alpha) & 3\,sen(\alpha) \\ -3\,sen(\alpha) & 3\,cos(\alpha) \end{vmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

Para calcular el determinante dado podemos usar la propiedad **Det7)** porque en cada elemento de la matriz aparece un factor repetido que es 3. Luego

$$\begin{vmatrix} 3\,cos(\alpha) & 3\,sen(\alpha) \\ -3\,sen(\alpha) & 3\,cos(\alpha) \end{vmatrix} = \left| 3 \cdot \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \right| =$$

$$3^2 \begin{vmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{vmatrix} = 9\left[cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)\right] = 9$$

Finalmente : $\begin{vmatrix} 3\,cos(\alpha) & 3\,sen(\alpha) \\ -\,3\,sen(\alpha) & 3\,cos(\alpha) \end{vmatrix} = 9$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ ❑

Método de la Adjunta

Hasta ahora habíamos usado la definición y el método de las operaciones elementales para calcular la inversa de una matriz. A continuación agregamos un método que es muy útil especialmente para matrices de orden 3, el llamado *Método de la Adjunta*.

El Método de la Adjunta se basa en el siguiente resultado :

$$A^{-1} = \frac{1}{|\,A\,|}\,Adj(A) \qquad (*)$$

donde $Adj(A)$ es la matriz llamada adjunta de A, con $Adj(A) = (c_{i\,j})^T$, donde los elementos $c_{i\,j}$ son los cofactores de la matriz A, mencionados en la definición de determinante.

Note que la inversa existe sólo cuando $|\,A\,| \neq 0$, por lo que siempre que se quiera calcular la inversa de una matriz deberemos en primer lugar calcular su determinante para ver si es distinto de cero. En caso de que el determinante sea cero, la inversa no existe, por lo tanto no tiene sentido calcularla.

Para el caso $n = 2$, es decir, una matriz cuadrada de orden 2, la adjunta es

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

y para el caso $n = 3$ la adjunta es

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

con $\quad c_{i\,j} = (-1)^{i+j}\,|\,A_{ij}\,|,$

y

$|\,A_{ij}\,|$ el determinante de la submatriz cuadrada que se obtiene de A eliminando la fila i y la columna j.

Ejemplo 4.

Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ usando el método de la adjunta.

<u>Solución:</u>

Calculemos, en primer lugar, el determinante de A.

$|\,A\,| = (1)(5) - (-1)(2) = 5 + 2 = 7 \neq 0$

De lo anterior, podemos decir que la inversa de A existe porque su determinante es distinto de cero.

Calculemos $Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$, donde $c_{i\,j} = (-1)^{i+j}\,|\,A_{ij}\,|,\ i = 1, 2;\ j = 1, 2$

$c_{11} = (-1)^{1+1}\,|\,A_{11}\,| = |\,5\,| = 5$

Recuerde que A_{11} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila 1 y la columna 1.

$c_{21} = (-1)^{2+1}|\,A_{21}\,| = -\,|\,-1\,| = 1$

Recuerde que A_{21} es la matriz que se obtiene de A eliminando la fila 2 y la columna 1.

Finalmente
$c_{12} = (-1)^{1+2}|\,A_{12}\,| = -\,|\,2\,| = -2$
$c_{22} = (-1)^{2+2}|\,A_{22}\,| = |\,1\,| = 1$

Por lo tanto, $Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

y se tiene que la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Finalmente : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ ❑

Ejemplo 5.

Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ usando el método de la adjunta.

Solución:

Calculemos el determinante de $A.$

$$|A| = ad - bc$$

Observemos que el determinante será distinto de cero si $ad \neq bc,$ por lo tanto supondremos esto en lo que sigue.

Calculemos la matriz adjunta.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (-1)^{1+1}\,|A_{11}| = |d| = d \\
c_{21} &= (-1)^{2+1}|A_{21}| = -|b| = -b \\
c_{12} &= (-1)^{1+2}|A_{12}| = -|c| = -c \\
c_{22} &= (-1)^{2+2}|A_{22}| = |a| = a
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

y se tiene que la inversa de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Finalmente : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, con $ad - bc \neq 0$ ❑

Ejemplo 6.

Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ usando el método de la adjunta.

<u>Solución:</u>

Calculemos el determinante de A.

$|A| = (1)(0)(2) + (2)(1)(0) + (-3)(-1)(3)$

$-(3)(0)(0) - (2)(-3)(2) - (1)(1)(-1) = 9 + 12 + 1 = 22 \neq 0$

Calculemos la matriz adjunta.

$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$

con

$c_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$c_{21} = (-1)^{2+1}|A_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+3) = -7$

$c_{31} = (-1)^{3+1}|A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$c_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-6) = 6$

$c_{22} = (-1)^{2+2}|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$c_{32} = (-1)^{3+2}|A_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(1+9) = -10$

$$c_{13} = (-1)^{1+3}|A_{13}| = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3}|A_{23}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

Por lo tanto, $Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 6 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

y se tiene que la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,Adj(A) = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 6 & 2 & -10 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{22} & -\frac{7}{22} & \frac{2}{22} \\ \frac{6}{22} & \frac{2}{22} & -\frac{10}{22} \\ \frac{3}{22} & \frac{1}{22} & \frac{6}{22} \end{pmatrix}$$

Finalmente : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{22} & -\frac{7}{22} & \frac{2}{22} \\ \frac{6}{22} & \frac{2}{22} & -\frac{10}{22} \\ \frac{3}{22} & \frac{1}{22} & \frac{6}{22} \end{pmatrix}$ ❑

Ejemplo 7.

Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ usando el método de la adjunta.

Solución:

Calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Calculemos la adjunta de A.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

con

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \mid A_{11} \mid = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \mid A_{21} \mid = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \mid A_{31} \mid = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \mid A_{12} \mid = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \mid A_{22} \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \mid A_{32} \mid = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \mid A_{13} \mid = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \mid A_{23} \mid = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \mid A_{33} \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Por lo tanto,

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

y se tiene que la inversa de $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, Adj(A) =$$

$$\frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

Finalmente :

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{33}a_{12}a_{21}} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}) \\ a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{pmatrix} \square$$

EJERCICIOS MATRICES Y DETERMINANTES

1

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz definida de la siguiente manera:

$$a_{i\,1} = 2^i\;,\; i = 1,2,3$$
$$a_{i\,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j-1)}\;,\; i = 1,2,3;\; j = 2,3$$

a) Escriba explícitamente la matriz A.

b) Emplee operaciones elementales para determinar si esta matriz es inversible y encuentre la inversa en caso de que lo sea

c) ¿Es triangular la matriz A?

2

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$a)$ Calcule $A^3 - 3\,B^2 + 10\,I_3$

$b)$ Emplee operaciones elementales para determinar si la matriz B es invertible y encuentre la inversa en caso de que lo sea

$c)$ Calcule $(AB)^T$ y compare el resultado con $B^T\,A^T$

3

Se dice que una matriz cuadrada A es $ortogonal$ ssi $A^{-1} = A^T$.
Muestre que:

$$A = \begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & sen\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\,sen\alpha & 0 & cos\alpha \end{bmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

es ortogonal, utilizando operaciones elementales.

$\boxed{4}$

Sea $R(\beta) = \begin{pmatrix} cos\beta & -\,sen\beta \\ sen\beta & cos\beta \end{pmatrix}$.

Calcule:

a) $R(\beta_1)\,R(\beta_2)$

b) $R(\beta_1 + \beta_2)$

c) $R(\beta_1) + R(\beta_2)$

d) $R(\beta)^{\,2}$

$\boxed{5}$

Hallar todas las matrices que conmuten en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{6}$

Muestre que la propiedad $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$ se verifica para

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

usando el método de la adjunta.

7

Encuentre matrices en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifiquen las propiedades siguientes:

a) $A\,B\; = \Theta\,;\; A \neq \Theta\,;\; B \neq \Theta$

b) $A^2 = \Theta;\; A \neq \Theta$

c) $A\,B\; = \Theta$ y $B\,A\; \neq \Theta$

d) $A^2 = A\;;\;\; A \neq I_2$

e) $A\,B = A\,C\,;\; B \neq C$

f) $A^T = A\,;\; A \neq I_2$

g) $A\,B\; = I_2\,;\, A \neq I_2$

Obs.: 1) Θ representa la matriz nula.
2) I_2 representa la matriz identidad de orden 2.

8

Considere dos matrices triangular superior de orden n. ¿Qué sucede con la suma y con el producto?.
Haga el mismo estudio anterior para matrices diagonales y escalares. ¿Qué concluye?.

9

Determine el valor o los valores de $\alpha\;\in\mathbb{R}$, de modo que $\left|A\right| = 1$, para $A = \begin{pmatrix} cos\alpha & sen\alpha \\ 1 & cos\alpha \end{pmatrix}$

10

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -\frac{1}{i} \\ -i^2 & -\frac{3i}{(i+1)^3} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{2-i}{1-i} & -\frac{1}{i^3} \\ 2+i & 2i \end{bmatrix}$$

Calcule $A\,B\,;\ B\,A\,;\ A^2\,;\ B^2\,;\ (A+B)^2\,;\ (A-B)^2\,;\ (i-1)\,A$.

11

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i^2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Obtenga las siguientes matrices:

a) A^t

b) $\Big[(F_1(-1)+F_2)+F_{21}\Big](A)$

c) $-(1+i)\cdot A$

d) $[\,F_1(-3)(A)\,]\cdot I^t$

12

Muestre que la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ posee elemento igual a -1 en la posición $(1,3)$.

13

Muestre que la inversa de una matriz triangular superior de orden 3 es siempre triangular superior.

14

Si $\frac{dA(t)}{dt} = (\frac{d\,a_{ij}(t)}{dt})$, entonces calcule $\left[\frac{dA(t)}{dt}\right]^{-1}$ para

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & t^2 \\ 1 & 0 & t \\ -t^2 & 1 & t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

Obs.: La derivada de una matriz es la matriz formada por las derivadas de cada uno de los elementos de ésta.

15

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

$a)$ $|A^{10}|$

$b)$ $|5\,A^{-1}|$

$c)$ $|(A^t)^{-1} + (A^{-1})^t|$

$d)$ $A - 2A + Adj(A) \cdot A$

16

Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, usando operaciones elementales.

17

$a)$ Recordemos que $a_{i\,i}$, $i = 1, 2, 3, ..., n$ indica cuáles son los elementos que están en la diagonal principal de una matriz $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Escriba expresiones generales que muestren cuáles son los elementos que están en la superdiagonal, en la subdiagonal y en la diagonal secundaria.

$b)$ Si $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces escriba una fórmula para calcular la suma de los elementos de una fila cualquiera de la matriz.

18

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, calcule:

$a)$ $D^2 \cdot A^T$

$b)$ $(D^{-1})^T + (D^T)^{-1} - a\,A$

19

Calcule, usando operaciones elementales, la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

20

Muestre que todas las matrices escalares de orden 3, distintas de la nula, poseen inversa.

21

Resuelva la ecuación $|A| = 3$ con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

22

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$a_{i\,j} = \begin{cases} \frac{1}{(i+j)} & ,\, i+j > 2 \\ 0 & ,\, i+j \leq 2 \end{cases}$$

$a)$ Obtenga A

$b)$ Verifique si $3A - 3A^T$ es antisimétrica

$c)$ Calcule $[(10A \cdot A^T)]^{-1}$

$d)$ Verifique si $A^{-1} \cdot (A^{-1})^T \cdot A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

23

Muestre que si $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, con $a_{i\,j} = \begin{cases} \frac{1}{i \cdot j} & ,\, si\, |i-j| < 2 \\ 0 & ,\, en\, caso\, contrario \end{cases}$, entonces $(A^T)^2$ es simétrica.

24

Muestre que si $A = L\,D\,L^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donde L es una matriz triangular inferior y D es una matriz diagonal, de órdenes apropiados, entonces A es simétrica.

25

Muestre que si $R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces $|R \cdot R^T + 3\,I| > 0$

26

Muestre que la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es invertible si $a_0 \neq a_1 \neq a_2$.

27

Muestre que : $|A| = 4 \Rightarrow |2(A^T \cdot I_n \cdot A^{-1})^{-1}| = 2$, para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

28

Muestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A + \frac{1}{2}I$ y $A - \frac{1}{2}I$ son ambas ortogonales, entonces A es antisimétrica.

29

Calcule $det\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

30

Muestre que es falsa la siguiente afirmación : "No existen matrices antisimétricas que sean ortogonales."

31

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Calcule :

$a)\ |A^T \cdot A^{-1}| + 3 \cdot |2\,A|$

$b)\ A^{-1} - 2\,A$

Algunos Ejercicios Resueltos
Matrices y Determinantes

R11

Tenemos que $i^2 = -1$, por tanto $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\Big[(F_1(-1) + F_2) + F_{21}\Big](A) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ -1 & 1+i & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -i & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $-(1+i)\cdot A = \begin{pmatrix} -(1+i) & i-1 & -2(1+i) \\ 0 & -(1+i) & 2(1+i) \\ 1+i & -(1+i) & 0 \end{pmatrix}$

d) $[\,F_1(-3)\,]\,I^t = F_1(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 3i & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ❑

R12

Recordemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,Adj(A)$, con $Adj(A) = (c_{ji})$.

$|A| = 6 - 9 + 0 - (-6) - 2 - 0 = 12 - 9 - 2 = 12 - 11 = 1$

$$c_{31}=(-1)^{3+1}\,|A_{31}|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3+2=-1$$

Por tanto, el elemento $(1,3)$ de la inversa de A es : $\frac{c_{31}}{|A|}=\frac{-1}{1}=-1$ $\square$

R13

Sea $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}$.

Luego

$$|\,A\,|=a_{11}a_{22}a_{33}$$

Usemos operaciones elementales para calcular la inversa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow F_1(\tfrac{1}{a_{11}})\,;F_2(\tfrac{1}{a_{22}});F_3(\tfrac{1}{a_{33}})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_{23}/a_{22} & 0 & 1/a_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33}\end{array}\right]\longrightarrow F_3(-\tfrac{a_{23}}{a_{22}})+F_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/(a_{22}\,a_{33})\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33}\end{array}\right]\longrightarrow F_3(-\tfrac{a_{13}}{a_{11}})+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & a_{12}/a_{11} & 0 & 1/a_{11} & 0 & -a_{13}/(a_{11}\,a_{33})\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/(a_{22}\,a_{33})\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33}\end{array}\right]\longrightarrow F_2(-\tfrac{a_{12}}{a_{11}})+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/a_{11} & -a_{12}/(a_{11}\,a_{22}) & (a_{23}\,a_{12}-a_{13}\,a_{22})/(a_{11}\,a_{22}\,a_{33})\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/(a_{22}\,a_{33})\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/a_{33}\end{array}\right]$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/a_{11} & -a_{12}/(a_{11}\,a_{22}) & (a_{23}\,a_{12}-a_{13}\,a_{22})/(a_{11}\,a_{22}\,a_{33})\\ 0 & 1/a_{22} & -a_{23}/(a_{22}\,a_{33})\\ 0 & 0 & 1/a_{33}\end{bmatrix}$$

Notamos que A^{-1} es efectivamente triangular superior. $\square$

$\boxed{\text{R16}}$

Triangularicemos la matriz A usando operaciones elementales.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ -1 & a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_{13}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(1)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_{24}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1+a & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_2(-1)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a-1 \\ 0 & 1+a & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_2(-1-a)+F_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a-1 \\ 0 & 0 & -1-a & -2-a \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_3(-(1+a)/2)+F_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \ |A| = -2\left(-\frac{1}{2}a^2 - a - \frac{3}{2}\right) = a^2 + 2a + 3$$

Finalmente resolvamos la ecuación $|A| = 3$:

$$|A| = 3 \Rightarrow a^2 + 2a + 3 = 3 \Rightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

Concluimos que los valores de a que hacen que $det(A) = 3$ son $a = -2$ y $a = 0$. ❑

$\boxed{\text{R17}}$

$a)$ Superdiagonal : $a_{i\,,i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$
Subdiagonal : $a_{i\,,i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$
Diagonal Secundaria : $a_{i\,,n-i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$b)\ \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}\,,\ \ i = 1, 2, 3, ..., n$ $\square$

R18

$$a)\ D = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \Rightarrow D^2 = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 2d & d^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ D^2 \cdot A^T = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 2d & d^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 2d & d^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & 0 \\ d^2 a & d^2 & 0 \\ 2da & 2d + d^2 a & d^2 \end{bmatrix}$$

$b)$ Calculemos D^{-1} usando operaciones elementales.

$$\begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(\frac{1}{d})\,;\,F_2(\frac{1}{d});\,d\neq 0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 1 & d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_3(-1)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & -\frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_3(\frac{1}{d})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{bmatrix},\ d \neq 0$$

Por otro lado, $(D^{-1})^T = (D^T)^{-1}$, por lo tanto:

$$(D^{-1})^T + (D^T)^{-1} - a\,A = (D^{-1})^T + (D^{-1})^T - a\,A = 2\,(D^{-1})^T - aA =$$

$$2\begin{bmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{1}{d^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix} - a\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{d} - a & -a^2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{d} - a & -\frac{2}{d^2} - a^2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{d} - a \end{bmatrix} \square$$

R20

$E = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ representa a todas las matrices escalares de orden 3 distintas de la nula si $k \neq 0$

Ahora

$$|\,E\,| = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3 \neq 0, \text{ pues } k \neq 0$$

De lo anterior, concluimos que E posee inversa porque su determinante es distinto de cero.

Finalmente, podemos decir que todas las matrices escalares de orden 3, distintas de la nula, poseen inversa. $\square$

R22

$$a)\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+2} \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$b)$ De $a)$ se observa que A es simétrica, es decir, $A^T = A.$ Luego :

$3A - 3A^T = 3\,(A - A^T) = 3\,\Theta = \Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es efectivamente antisimétrica

$$c)\ 10\,A = 10\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{4} \end{bmatrix} \quad ; \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$(10A \cdot A^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & \frac{10}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} & \frac{10}{12} \\ \frac{10}{12} & \frac{125}{72} \end{bmatrix}$$

$$[(10A \cdot A^T)]^{-1} = \frac{1}{\frac{625}{324} - \frac{25}{36}} \begin{bmatrix} \frac{125}{72} & -\frac{10}{12} \\ -\frac{10}{12} & \frac{10}{9} \end{bmatrix} = \frac{81}{100} \begin{bmatrix} \frac{125}{72} & -\frac{10}{12} \\ -\frac{10}{12} & \frac{10}{9} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{45}{32} & -\frac{27}{40} \\ -\frac{27}{40} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

$d)$ $A^{-1} \cdot (A^{-1})^T \cdot A^T \cdot A = A^{-1} \cdot \left[(A^T)^{-1} \cdot A^T \right] \cdot A = A^{-1} \cdot I \cdot A =$
$A^{-1} \cdot A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ❑

R26

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1 a_2^2 + a_2 a_0^2 + a_0 a_1^2 + - a_1 a_0^2 - a_2 a_1^2 - a_0 a_2^2 =$$

$a_1(a_2^2 - a_0^2) + a_0(a_1^2 - a_2^2) + a_2(a_0^2 - a_1^2) \neq 0,$ pues $a_0 \neq a_1 \neq a_2$ y al menos dos de estas constantes es distinta de cero, además $a_i^2 - a_j^2 \neq 0,$ para $i \neq j$. ❑

R31

En primer lugar es conveniente calcular el determinante de A, porque de ese modo podemos saber si posee inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 14 - 12 + 5 - 0 + 18 = 25$$

Dado que $|A| \neq 0,$ A posee inversa.

$a)$ $|A^T \cdot A^{-1}| + 3|2A| = |A^T||A^{-1}| + (3)(2^3)|A| = |A|\frac{1}{|A|} + (3)(2^3)|A| =$

$1 + 24|A| = 1 + 24(25) = 601$

$b)$ Calculemos A^{-1} usando operaciones elementales.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow_{F_{13}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow_{F_1(-3)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 16 & : & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2(-1/7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -16/7 & : & 0 & -1/7 & 3/7 \\ 0 & 2 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2(-2)+F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -16/7 & : & 0 & -1/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 25/7 & : & 1 & 2/7 & -6/7 \end{bmatrix} \longrightarrow F_3(7/25)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -16/7 & : & 0 & -1/7 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix} \longrightarrow F_3(16/7)+F_2\,;\,F_3(3)+F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & : & 21/25 & 6/25 & 7/25 \\ 0 & 1 & 0 & : & 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2(-4)+F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -43/25 & 2/25 & 19/25 \\ 0 & 1 & 0 & : & 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -43/25 & 2/25 & 19/25 \\ 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix}$$

Luego :

$$A^{-1} - 2\,A = \begin{bmatrix} -43/25 & 2/25 & 19/25 \\ 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -43/25 & 2/25 & 19/25 \\ 16/25 & 1/25 & -3/25 \\ 7/25 & 2/25 & -6/25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 6 & 10 & 14 \\ 2 & 8 & -6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -43/25 & -98/25 & 69/25 \\ -134/25 & -249/25 & -353/25 \\ -43/25 & -198/25 & 144/25 \end{bmatrix} \square$$

3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Se define un sistema de ecuaciones lineales como el conjunto de ecuaciones con la estructura siguiente :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

donde $a_{i\,j}$, con $i = 1, 2, ..., m\,;\ j = 1, 2, ..., n$ son números reales conocidos, al igual que los números b_i , $i = 1, 2, ..., m$.
A los números desconocidos x_j , $j = 1, 2, ..., n$ se les denomina incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en obtener los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones.

Observemos que el sistema mencionado en la definición anterior posee m ecuaciones y n incógnitas. Cuando el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas se dice que el *sistema* es *cuadrado*.

Un *sistema* es *equivalente* a otro cuando ambos poseen la misma solución.

Todos los sistemas de ecuaciones lineales se pueden escribir en *forma matricial* del siguiente modo :

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$ la matriz de coeficientes

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$ el vector de constantes

y

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$ el vector de incógnitas

Un sistema cuyo vector de constantes es nulo, se denomina *sistema homogéneo*, es decir, el sistema $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$ es un sistema homogéneo.

Ejemplo 1.

Escriba, en forma matricial, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

$a)$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

con x y y incógnitas.

$b)$

$$\begin{aligned} x_1 - x_4 &= -x_3 \\ x_2 + 2\,x_4 &= -3x_1 \end{aligned}$$

con x_1, x_2 , x_3 y x_4 incógnitas.

$c)$

$$x - t = \pi\, x$$

con x y t incógnitas.

Solución:

$a)$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

con x y y incógnitas.

El sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= -4 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

está formado por 2 ecuaciones y 2 incógnitas, es decir, es un sistema cuadrado. Escribámoslo en forma matricial.

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Adicionalmente podemos considerar distintas formas de escribir el sistema anterior de acuerdo a la disposición de sus elementos.

Si reordenamos las incógnitas, entonces aparece el sistema equivalente :

$$\begin{aligned} -2y + 3x &= -4 \\ y - x &= -1 \end{aligned}$$

cuya expresión matricial es $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Observemos que un cambio en el orden de las incógnitas produce un cambio en las columnas de la matriz de coeficientes.

Si ahora cambiamos el orden de las ecuaciones se obtiene el sistema equivalente :

$$\begin{aligned} -x + y &= -1 \\ 3x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

con expresión matricial asociada : $A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observemos que un cambio en el orden de las ecuaciones produce un cambio en las filas de la matriz de coeficientes y también en las filas del vector de constantes.

$b)$

$$x_1 - x_4 = \; - x_3$$
$$x_2 \; + 2\, x_4 = \; - 3x_1$$

con x_1, x_2 , x_3 y x_4 incógnitas.

Este sistema está formado por 2 ecuaciones y 4 incógnitas.

Reordenando los elementos para que aparezcan de la forma indicada en la definición, se tiene que :

$$x_1 + x_3 - x_4 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$$

Ahora escribamos este sistema homogéneo en forma matricial.

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Notemos que siempre es posible, conocida la forma matricial, escribir el sistema asociado en la forma normal.

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_3 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_3 - x_4 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$$

Esto nos permite ver que es equivalente un sistema de ecuaciones lineales escrito en la forma normal que el correspondiente escrito en forma matricial.

$c)$

$x - t = \pi x$

con x y t incógnitas.

Reordenando los elementos, se tiene que :

$x - \pi x - t = 0 \Rightarrow (1 - \pi) x - t = 0$

Este sistema está formado por una ecuación y 2 incógnitas. Su forma matricial es $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

con

$$A = [\, 1 - \pi \quad -1 \,] \ ; \ \boldsymbol{b} = [\, 0 \,] \ ; \ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}$$

Este sistema también es homogéneo, pues su vector de constantes $\boldsymbol{b}$ es igual al vector nulo. ❑

Métodos para Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales Cuadrados

En lo que sigue supondremos que $m = n$, es decir, trabajaremos con sistemas cuadrados en donde el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas.

Los dos primeros métodos que mencionaremos se basan en el uso de las operaciones elementales, en el primer caso para obtener un sistema equivalente cuya matriz de coeficientes sea triangular conocido como *Método de Gauss*, y en el segundo caso para obtener un sistema equivalente cuya matriz de coeficientes sea diagonal conocido como *Método de Jordan*.

Método de Gauss

Recordemos que este método se aplica a sistemas de ecuaciones lineales cuadrados.

Este método consiste en aplicar operaciones elementales a la matriz ampliada $[A \quad \boldsymbol{b}]$ asociada a la forma matricial $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de modo que la matriz de coeficientes A sea transformada en una matriz triangular. Es importante destacar que se aplican a la par las mismas operaciones elementales sobre el vector de constantes $\boldsymbol{b}$, generándose finalmente un sistema equivalente triangular $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ que se resuelve usando sustitución regresiva o progresiva dependiendo de si generamos una matriz triangular superior o inferior, respectivamente.

Ejemplo 2.

Resuelva, usando el Método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$2x + 3y - z = 1$
$x - z = 0$

$-x+2y-3z=6$

<u>Solución:</u>

En primer lugar debemos escribir el sistema en forma matricial.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0+3-2-0+4+9=14\neq 0$$

Ahora aplicaremos operaciones elementales sobre la matriz ampliada $[\,A \quad \boldsymbol{b}\,]$ con el objeto de triangular la matriz $A,$ y de ese modo obtener un sistema triangular equivalente $T\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$

$$[\,A \quad \boldsymbol{b}\,]=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ -1 & 2 & -3 & : & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(-1/2)+F_2\,;\,F_1(1/2)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & : & -1/2 \\ 0 & 7/2 & -7/2 & : & 13/2 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_2(7/3)+F_3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & : & -1/2 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix}$$

Hemos conseguido triangularizar superiormente la matriz $A,$ con lo que el sistema triangular equivalente es:

$2x+3y-z=1$
$-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z=-\frac{1}{2}$
$-\frac{14}{3}z=\frac{16}{3}$

con $T=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix}$

Usando sustitución regresiva, es decir, partimos resolviendo la última ecuación para despejar la última incógnita y el resultado obtenido se reemplaza en la penúltima ecuación para despejar la penúltima incógnita y así sucesivamente, se tiene que:

$$z = -\frac{16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$\frac{3}{2}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \Rightarrow \frac{3}{2}y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) \Rightarrow \frac{3}{2}y = \frac{15}{14} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{14} \Rightarrow y = \frac{5}{7}$$

$$2x = 1 + z - 3y \Rightarrow 2x = 1 - \frac{8}{7} - \frac{15}{7} \Rightarrow 2x = -\frac{16}{7} \Rightarrow x = -\frac{8}{7}$$

Finalmente podemos decir que el vector solución del sistema

$$\begin{aligned} &2x + 3y - z = 1 \\ &x - z = 0 \\ &-x + 2y - 3z = 6 \end{aligned}$$

es $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{bmatrix}$ ❑

Método de Jordan

Este método también se aplica a sistemas de ecuaciones lineales cuadrados.

Este método consiste en aplicar operaciones elementales a la matriz ampliada $[A \quad \boldsymbol{b}]$ asociada a la forma matricial $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ de modo que la matriz de coeficientes A sea transformada en una matriz diagonal. Es importante destacar que se aplican a la par las mismas operaciones elementales sobre el vector de constantes $\boldsymbol{b}$, generándose finalmente un sistema equivalente diagonal $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ que se resuelve muy fácilmente. Para obtener el sistema diagonal se generan ceros bajo la diagonal principal y sobre la diagonal principal de la matriz de coeficientes, por lo tanto, la primera etapa del Método de Jordan, que es generar ceros bajo la diagonal principal o sobre la diagonal principal según nuestra elección, coincide exactamente con el Método de Gauss, es decir, el Método de Jordan incluye al Método de Gauss.

Ejemplo 3.

Resuelva, usando el Método de Jordan, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$
\begin{aligned}
&2x + 3y - z = 1\\
&x - z = 0\\
&-x + 2y - 3z = 6
\end{aligned}
$$

Solución:

Observemos que el sistema anterior es el mismo que resolvimos en el ejemplo 2 usando el Método de Gauss.

$$
[A \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 1 & 0 & -1 & : & 0 \\ -1 & 2 & -3 & : & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(-1/2)+F_2\,;\,F_1(1/2)+F_3}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & : & -1/2 \\ 0 & 7/2 & -7/2 & : & 13/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(7/3)+F_3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & : & -1/2 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix}
$$

Falta la segunda etapa del proceso, que es generar los ceros en la parte superior de la matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & : & -1/2 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix} \longrightarrow F_3(-3/28)+F_2;\, F_3(-3/14)+F_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & : & -1/7 \\ 0 & -3/2 & 0 & : & -15/14 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix} \longrightarrow F_2(2)+F_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & : & -16/7 \\ 0 & -3/2 & 0 & : & -15/14 \\ 0 & 0 & -14/3 & : & 16/3 \end{bmatrix}$$

Hemos conseguido obtener el sistema diagonal $D\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ con

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{14}{3} \end{bmatrix} ;\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ;\ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{7} \\ -\frac{15}{14} \\ \frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema anterior debemos despejar directamente cada incógnita de cada ecuación :

$$2x = -\frac{16}{7} \Rightarrow x = -\frac{8}{7}$$

$$-\frac{3}{2}y = -\frac{15}{14} \Rightarrow y = \frac{5}{7}$$

$$-\frac{14}{3}z = \frac{16}{3} \Rightarrow z = -\frac{8}{7}$$

Finalmente la solución del sistema

$$2x + 3y - z = 1$$
$$x - z = 0$$
$$-x + 2y - 3z = 6$$

es

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} \\ \frac{5}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

que coincide, como era previsible, con la obtenida usando el Método de Gauss. ❑

Método de la Inversa

El Método de la Inversa requiere que el sistema sea cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas; y además el determinante de la matriz de coeficientes A debe ser distinto de cero, para asegurar la existencia de la inversa de A.

Recordemos que la forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales es

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (1)$$

Si premultiplicamos $($multiplicamos a izquierda$)$ por A^{-1} la igualdad (1) se tiene que:

$$A^{-1}\cdot(A\,\boldsymbol{x}) = A^{-1}\cdot\boldsymbol{b} \;\Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\,\boldsymbol{x} = A^{-1}\cdot\boldsymbol{b} \;\Rightarrow I\;\cdot\boldsymbol{x} = A^{-1}\cdot\boldsymbol{b} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{x} = A^{-1}\cdot\boldsymbol{b}}$$

De la expresión obtenida notamos que el Método de la Inversa consiste en que para calcular el vector de incógnitas debemos premultiplicar el vector de constantes por la inversa de la matriz de coeficientes.

Ejemplo 4.

Resuelva, usando el Método de la Inversa, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y - z &= 0 \\ -x + y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

En primer lugar debemos verificar si la matriz de coeficientes posee un determinante distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6+1-1-2+1+3 = -4 \neq 0$$

Ahora podemos proceder con el cálculo de la inversa de A sabiendo que tal inversa existe porque $|A| \neq 0$

Para calcular la inversa podemos usar operaciones elementales o el método de la adjunta. Usaremos operaciones elementales.

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & : & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow F_1(-1)+F_2\,;F_1(1)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & : & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow F_2(-2)+F_3$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & : & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow F_3(-1/4)$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & -1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right] \longrightarrow F_3(1)+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & : & 1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right] \longrightarrow F_2(-1)+F_1$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & : & 5/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -3/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right]$$

De lo anterior concluimos que $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Aplicando el Método de la Inversa se tiene que:

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\cdot\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -1 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Las incógnitas toman los valores $x=\frac{3}{4}$, $y=-1$ y $z=-\frac{5}{4}$ ❑

Método de Cramer

El Método de Cramer requiere que el sistema sea cuadrado y que además el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero.

Sean x_i, $i = 1, 2, ..., n$ las n incógnitas del sistema con n ecuaciones $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Sea A_i, con $i = 1, 2, ..., n$, la matriz que se obtiene de A reemplazando la columna $i -$ ésima por el vector de constantes $\boldsymbol{b}$.

El Método de Cramer nos dice que para obtener los valores de las incógnitas debemos usar la fórmula:

$$\boxed{x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \text{ , para } i = 1, 2, 3, ..., n}$$

Ejemplo 5.

Resuelva, usando el Método de Cramer, el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 2y - z &= 0 \\ -x + y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

En primer lugar escribamos el sistema en forma matricial.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Calculemos ahora el determinante de A para saber si es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6+1-1-2+1+3 = -4 \neq 0$$

$$x_1 \equiv x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-6-2+0+4+1-0}{-4} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Notemos que A_1 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la primera columna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ por el vector de constantes $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$x_2 \equiv y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0+1-2-0+2+3}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

Notemos que A_2 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la segunda columna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ por el vector de constantes $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$x_3 \equiv z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4+0+1+2-0-2}{-4} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

Notemos que A_3 es la matriz que se obtiene de A reemplazando la tercera columna $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ por el vector de constantes $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Finalmente el vector solución está dado por:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -1 \\ -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \square$$

Rango de una Matriz.

¿Qué es el *rango de una matriz*?. Es el número de filas distintas de la nula luego de un "proceso de triangulación".
¿Qué es un *proceso de triangulación*?. Es la aplicación del método de Gauss a una matriz que no necesariamente es cuadrada.

Ejemplo 6.

Calcule el rango de las siguientes matrices:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c)\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Apliquemos el proceso de triangulación a la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow F_1(-1)+F_2\ ;\ F_1(1)+F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que es imposible seguir generando ceros sin perder los que ya hemos ganado. Cuando llegamos a esta etapa significa que el proceso de triangulación ha terminado, y procedemos a contar las filas distintas de la nula, número que se corresponde con el rango de la matriz A.

Luego: $rango(A) = 2$ ❑

$$b)\, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{F_1(-1/2)+F_2\ ;\ F_1(-1/2)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{F_2(-2)+F_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Hemos finalizado el proceso de triangulación, que en este caso como la matriz es cuadrada coincide exactamente con una triangulación común. Ahora contamos el número de filas distintas de la nula y concluimos que $rango(B) = 3$, pues se observan tres filas distintas de la nula. ❑

$$c)\, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{F_1(2)+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

Es imposible seguir generando ceros, por lo tanto, $rango(C) = 2$. ❑

Clasificación de los Sistemas de Ecuaciones Lineales Rectangulares.

Un sistema de ecuaciones lineales se dice rectangular cuando no necesariamente es cuadrado.
Clasificaremos los sistemas haciendo uso del concepto de rango de una matriz. Esta clasificación recibe el nombre de *Teorema de Rouché-Frobenius*.

Sea $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ un sistema de ecuaciones lineales escrito en forma matricial, con N incógnitas. Sean r_A el rango de A y r_{Ab} el rango de la matriz ampliada $(A : \boldsymbol{b})$

$i)$ $r_A = r_{Ab} = N \Rightarrow$ el sistema posee sólo una solución

$ii)$ $r_A = r_{Ab} < N \Rightarrow$ el sistema posee infinitas soluciones
En este caso se deben fijar $N - r_A$ incógnitas y despejar las restantes incógnitas en términos de las que se fijaron.

$iii)$ $r_A \neq r_{Ab} \Rightarrow$ el sistema no posee soluciones

Ejemplo 7.

Clasifique los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$a)$

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + z &= 1 \\
x - 4y - z &= 0 \\
-x + 4y + z &= -1
\end{aligned}
$$

$b)$

$$
\begin{aligned}
2x - y &= 4 \\
x - y &= 1
\end{aligned}
$$

$c)$

$x-4=y+z$
$4-x=4z$

Solución:

$a)$ El sistema

$3x-2y+z=1$
$x-4y-z=0$
$-x+4y+z=-1$

escrito en forma matricial es:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} ; \; \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Trabajaremos sólo con la matriz ampliada $(A:\boldsymbol{b})$, pues de ésta podemos extraer la información relativa al rango de A y al rango de la ampliada.

$$(A:\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & : & 1 \\ 1 & -4 & -1 & : & 0 \\ -1 & 4 & 1 & : & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{F_1(-1/3)+F_2 \; ; \; F_1(1/3)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & : & 1 \\ 0 & -10/3 & -4/3 & : & -1/3 \\ 0 & 10/3 & 4/3 & : & -2/3 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{F_2(1)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & : & 1 \\ 0 & -10/3 & -4/3 & : & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que $r_A=2$ y $r_{Ab}=3$. Como ambos número son distintos concluimos que el sistema no posee solución. ❑

$b)$ El sistema

$2x-y=4$
$x-y=1$

escrito en forma matricial es:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\ ;\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$$

Luego

$$(A:\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix}2 & -1 & : & 4\\ 1 & -1 & : & 1\end{bmatrix}\ \longrightarrow^{F_1(-1/2)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & : & 4\\ 0 & -1/2 & : & -1\end{bmatrix}$$

Tenemos que $r_A=2\ =r_{Ab}\ =N$. Lo anterior nos dice que el sistema posee una solución. ❑

$c)$ El sistema

$$\begin{aligned} x-4&=y+z\\ 4-x&=4z\end{aligned}$$

lo podemos reescribir como

$$\begin{aligned} x-y-z&=4\\ x+4z&=4\end{aligned}$$

y escrito en forma matricial es:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\ ;\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}$$

Luego

$$(A:\boldsymbol{b})=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & : & 4\\ 1 & 0 & 4 & : & 4\end{bmatrix}\ \longrightarrow^{F_1(-1)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & : & 4\\ 0 & 1 & 5 & : & 0\end{bmatrix}$$

Tenemos que $r_A = 2 = r_{Ab} < N = 3$. Lo anterior nos dice que el sistema posee infinitas soluciones. $\square$

Ejemplo 8.

Resuelva el sistema
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

<u>Solución:</u>

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(-1/3)+F_2} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$r_1 = rango(A) = 2 = r_2 = rango(A:b) < N = 3 \Rightarrow$ existen infinitas soluciones

Fijemos, por ejemplo, z :

$$-y/3 - 2z/3 = -1/3 \Rightarrow y + 2z = 1 \Rightarrow y = 1 - 2z$$

$$3x - 2y + 5z = 1 \Rightarrow x = (1 + 2y - 5z)/3 \Rightarrow x = (1 + 2 - 4z - 5z)/3 \Rightarrow$$

$$x = (3 - 9z)/3 \Rightarrow x = 1 - 3z$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3z \\ 1 - 2z \\ z \end{bmatrix}, \; z \in \mathbb{R} \quad \square$$

EJERCICIOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1

Muestre que si u y v son dos soluciones del sistema homogéneo $Ax = \theta$, entonces $3u - 2v$ es también solución.

2

Resuelva el siguiente sistema usando Cramer y Jordan :

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$

$-x_1 + x_3 = 0$

$x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$

3

Verifique la veracidad de la siguiente afirmación:

El sistema $2x - 3y = 1\,,\; x - 5y = \frac{1}{2}$, tiene como solución al vector $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

4

Obtenga la solución del sistema

$ax + y - z = 1$

$x - y + z = 3$

$3x + 6y - 7z = 5$

usando : $a)$ Gauss $\qquad$ $b)$ Jordan , $\qquad$ con $a \in \mathbb{R}$

5

Muestre que si $A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces el sistema homogéneo asociado posee infinitas soluciones.

6

Resuelva el sistema

$y - z = -1 \quad ; \quad 4x + 6 = 5z \quad ; \quad 3x - 2y = -3z - 4$

usando :

$a)$ Cramer
$b)$ Jordan

7

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces resuelva el sistema $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ usando :

$a)$ El método de Gauss
$b)$ El método de Cramer
$c)$ El método de la inversa

8

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 - x_2 &= 5x_1 \\ x_2 - x_1 &= 4 - 3x_2 \end{aligned}$$

usando Cramer.

9

Un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es homogéneo si $\boldsymbol{b} = \theta$.
Muestre que el sistema
$3x_1 - cos(\pi) - 5x_2 = 1 - 2x_3$
$4x_3 - 5x_2 = x_1 - 3x_3$
es homogéneo, si consideramos $x_1,\ x_2$ y x_3 como incógnitas.

10

Resuelva el sistema

$2x - 3y = 2$
$x + 5y = -4$
usando
$a)$ el método de la inversa
$b)$ Cramer
$c)$ Jordan

11

Dadas las ecuaciones

$2x - y + z = 1$
$x + y + z = 0$
$3x - 3z = 6$

$a)$ Escriba el sistema en forma matricial

$b)$ Calcule el determinante de la matriz de coeficientes

$c)$ Resuelva el sistema usando el método de $Cramer$

$d)$ Resuelva el sistema usando el método de $Gauss$

12

Verifique la veracidad de la afirmación: "Todos los sistemas con 3 ecuaciones y 2 incógnitas poseen infinitas soluciones".

13

Muestre que el sistema $2x_1 - x_2 + x_3 = 5\,;\, 3x_1 - x_3 = 2\,;\, -x_1 + \frac{1}{3}x_3 = a$, con $a \neq 0$, no posee solución

14

Explique si es verdad o mentira que si $\alpha + \beta = 0$, entonces el sistema

$$\begin{aligned} &x + y\,cos(\alpha) = 0 \\ &x\,cos(\alpha) + y + cos(\beta)\,z = 0 \\ &y\,cos(\beta) + z = 0 \end{aligned}$$

no posee solución.

15

Resuelva el sistema dado, suponiendo que c es constante.

$$\begin{aligned} &3x_1 - 4x_2 + x_3 = 6c \\ &x_1 - 3c = 4x_2 \end{aligned}$$

16

Muestre que el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ \tfrac{-2}{5}x - \tfrac{3a}{5}y &= a \end{aligned}$$

siempre posee infinitas soluciones, con a constante real.

17

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones :

$a)\ -3x+4y-1=2$
$\quad 6x-8y+3=a\,,\quad a\in\mathbb{R}$

$b)\ 4t-2y+z=1-x$
$\quad z+y=-1$
$\quad x=t+w$

$\boxed{18}$

Obtenga los valores de $a\in\mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema

$$\begin{aligned} &3x_1-x_2+a\,x_3=0\\ &x_1\qquad -x_3=a+1\\ &-a\,x_1+x_2=-a \end{aligned}$$

tenga: $i)$ única solución, $ii)$ infinitas soluciones, $iii)$ ninguna solución.
Calcule las soluciones en el caso $ii)$.

$\boxed{19}$

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones :

$a)\ 3x-2t+6z=5-3y$
$\quad 5-3t+8y=-4x+w$
$\quad \pi\,x-e\,y=0$

$b)\ 3x_1-2x_2+4x_3=0$
$\quad 3x_2-6x_3=0$
$\quad x_1-x_2+x_3=0$

$\boxed{20}$

Obtenga el(los) valor(es) de a, con $a>0$, de modo que el sistema

$$\begin{aligned} &ax-y=0\\ &x\ -ay=0 \end{aligned}$$

posea infinitas soluciones.

Algunos Ejercicios Resueltos
Sistemas de Ecuaciones Lineales

R2

$a)$ **Cramer.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3-1}{-9} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1-1-2-3}{-9} = \frac{-7}{-9} = \frac{7}{9}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-1-3}{-9} = \frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$b)$ **Jordan.**

$$(A:b) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_{12}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(2)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_1(1)+F_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_2(-1/3)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4/3 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_3(-1)+F_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 3 & 4/3 \end{bmatrix} \longrightarrow_{F_3(-1/3)+F_1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -4/9 \\ 0 & -3 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$-x_1 = -\frac{4}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{9}$
$-3x_2 = -\frac{7}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{9}$
$3x_3 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_3 = \frac{4}{9}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{7}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix} \quad \square$$

R4

La matriz de coeficientes del sistema dado es : $A = \begin{bmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -7 \end{bmatrix}$

Calculemos el determinante de A para saber cuándo tendrá solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 7a + 3 - 6 - 3 - 6a + 7 = a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Notamos que el sistema tendrá solución única si $a \neq -1$.

$a)$ Gauss.

$$(A:b) = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -7 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ a & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -7 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_1(-a)+F_2\,;\,F_1(-3)+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & -1-a & 1-3a \\ 0 & 9 & -10 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_2(-9/(1+a))+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & -1-a & 1-3a \\ 0 & 0 & -1 & (23a-13)/(1+a) \end{pmatrix}$$

$$-z = \frac{23a-13}{1+a} \Rightarrow z = \frac{13-23a}{1+a}$$

$(1+a)y-(1+a)z=1-3a \Rightarrow y=\frac{1-3a+(1+a)z}{1+a} \Rightarrow y=\frac{1-3a+13-23a}{1+a} \Rightarrow y=\frac{14-26a}{1+a}$

$x-y+z=3 \Rightarrow x=3+y-z \Rightarrow x=3+\frac{14-26a}{1+a}-\frac{13-23a}{1+a} \Rightarrow x=\frac{3+3a+14-26a-13+23a}{1+a}$

$\Rightarrow x=\frac{4}{1+a}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{1+a} \\ \frac{14-26a}{1+a} \\ \frac{13-23a}{1+a} \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}-\{-1\}$$

$b)$ Jordan

Usando lo que ya hemos avanzado con Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & -1-a & 1-3a \\ 0 & 0 & -1 & (23a-13)/(1+a) \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-(1+a))+F_2;\, F_3(1)+F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & (26a-10)/(1+a) \\ 0 & 1+a & 0 & 14-26a \\ 0 & 0 & -1 & (23a-13)/(1+a) \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(1/(1+a))+F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/(1+a) \\ 0 & 1+a & 0 & 14-26a \\ 0 & 0 & -1 & (23a-13)/(1+a) \end{pmatrix}$$

$x=\frac{4}{1+a}$

$(1+a)y=14-26a \Rightarrow y=\frac{14-26a}{1+a}$

$-z=\frac{23a-13}{1+a} \Rightarrow z=\frac{13-23a}{1+a}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{1+a} \\ \frac{14-26a}{1+a} \\ \frac{13-23a}{1+a} \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R}-\{-1\} \ \square$$

$\boxed{\text{R6}}$

El sistema es :

$y - z = -1$

$4x - 5z = -6$

$3x - 2y + 3z = -4$

En formato matricial : $A\boldsymbol{x} = b$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 8 - 12 = -19 \neq 0$$

$a)$ Cramer

$$x_1 \equiv x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & -5 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{20-12+10+18}{-19} = -\frac{36}{19}$$

$$x_2 \equiv y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & -5 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15+16-18+12}{-19} = -\frac{25}{19}$$

$$x_3 \equiv z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-18+8+16}{-19} = -\frac{6}{19}$$

$$\therefore \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{36}{19} \\ -\frac{25}{19} \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix}$$

$b)$ Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -5 & -6 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{F_{13}} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow {}_{F_1(-4/3)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8/3 & -9 & -2/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow {\scriptstyle F_2(-3/8)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8/3 & -9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 19/8 & -3/4 \end{bmatrix} \longrightarrow {\scriptstyle F_3(72/19)+F_2;\, F_3(-24/19)+F_1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -58/19 \\ 0 & 8/3 & 0 & -200/57 \\ 0 & 0 & 19/8 & -3/4 \end{bmatrix} \longrightarrow {\scriptstyle F_2(3/4)+F_1} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -108/19 \\ 0 & 8/3 & 0 & -200/57 \\ 0 & 0 & 19/8 & -3/4 \end{bmatrix}$$

$$3x = -\frac{108}{19} \Rightarrow x = -\frac{36}{19}$$

$$\frac{8}{3}y = -\frac{200}{57} \Rightarrow y = -\frac{25}{19}$$

$$\frac{19}{8}z = -\frac{3}{4} \Rightarrow z = -\frac{6}{19}$$

$$\therefore \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{36}{19} \\ -\frac{25}{19} \\ -\frac{6}{19} \end{bmatrix} \square$$

R7

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 4 + 6 - 0 - 3 = 8 \neq 0$$

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{F_1(-3)+F_3}{\overset{F_1(-1)+F_2}{\longrightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & -7 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow {\scriptstyle F_2(-11/2)+F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -21 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema triangular equivalente es :

$$4x_3 = -21 \Rightarrow x_3 = -\tfrac{21}{4}$$

$$2x_2 - 2x_3 = 4 \Rightarrow x_2 = \tfrac{1}{2}\left(4 + 2x_3\right) \Rightarrow x_2 = 2 + x_3 \Rightarrow x_2 = 2 - \tfrac{21}{4} = -\tfrac{13}{4}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 + 3x_2 - 2x_3 \Rightarrow x_1 = -1 - \tfrac{39}{4} + \tfrac{42}{4} = -\tfrac{1}{4}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} \\ -\frac{21}{4} \end{bmatrix}$$

$b)$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-1+0+12-4-9-0}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-3+0-4-18-1-0}{8} = \frac{-26}{8} = -\frac{13}{4}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{2-27-2-3-6-6}{8} = \frac{-42}{8} = -\frac{21}{4}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} \\ -\frac{21}{4} \end{bmatrix}$$

$c)$ Calculemos la inversa de A usando operaciones elementales.

$$[A : I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{smallmatrix} F_1(-1)+F_2 \\ F_1(-3)+F_3 \end{smallmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2(1/2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 11 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2(-11)+F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5/2 & -11/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3(1/4)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{F_3(1)+F_2 \\ F_3(-2)+F_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1/4 & 11/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & -7/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2(3)+F_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & -7/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & -7/8 & 1/4 \\ 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/8 & -7/8 & 1/4 \\ 5/8 & -11/8 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{13}{4} \\ -\frac{21}{4} \end{bmatrix} \quad \square$$

R15

Escribamos el sistema en forma matricial :

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 6c \\ 1 & -4 & 0 & 3c \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(-1/3)+F_2} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 6c \\ 0 & -8/3 & -1/3 & c \end{bmatrix}$$

$r_A \equiv rango(A) = 2 = r_{Ab} \equiv rango(A : \boldsymbol{b}) < N = 3$

Debemos fijar $N - r_A = 3 - 2 = 1$ incógnita

Fijemos x_3 , y despejemos x_2 de la segunda ecuación obtenida :

$-\frac{8}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = c \Rightarrow x_2 = \frac{-3c - x_3}{8}$

$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 6c \Rightarrow x_1 = \frac{6c + 4x_2 - x_3}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{6c + 4\left(\frac{-3c - x_3}{8}\right) - x_3}{3} \Rightarrow$

$x_1 = \frac{48c - 12c - 4x_3 - 8x_3}{24} \Rightarrow x_1 = \frac{36c - 12x_3}{24} \Rightarrow x_1 = \frac{3c - x_3}{2}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3c - x_3}{2} \\ \frac{-3c - x_3}{8} \\ x_3 \end{bmatrix}, \ x_3 \in \mathbb{R} \quad \square$$

R17

$a) \ -3x + 4y - 1 = 2$
$\quad 6x - 8y + 3 = a\,, \quad a \in \mathbb{R}$

$-3x + 4y = 3$
$\quad 6x - 8y = a - 3$

Tenemos que :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ a - 3 \end{pmatrix}$$

Luego :

$$(A : \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 6 & -8 & a - 3 \end{pmatrix} \longrightarrow^{F_{21}(2)} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & a + 3 \end{pmatrix}$$

$i)$ Una solución. Se debe dar $r_A = r_{Ab} = N$, pero $r_A = rango(A) = 1$ y $N = 2$, por lo tanto, este sistema nunca tendrá única solución.

$ii)$ Infinitas soluciones. $r_A = r_{Ab} < N$
Para que r_A sea igual a r_{Ab} debemos tener que $a + 3 = 0$, es decir $a = -3$.
Por lo tanto, si $a = -3$, entonces $r_A = r_{Ab} = 1 < N = 2$ y el sistema posee infinitas soluciones.
Obtengamos tales soluciones. Para ello debemos fijar $N - r_A = 2 - 1 = 1$ incógnitas.
Fijemos x.

$-3x+4y=3 \Rightarrow y=\frac{3+3x}{4}$

$\therefore\ \overline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ \frac{3+3x}{4} \end{pmatrix}$

$iii)$ Ninguna solución. Para que el sistema no posea solución se debe tener que $r_A = r_{Ab}$, para ello es necesario que $a+3 \neq 0$. Por lo tanto, si $a+3 \neq 0$, es decir, $a \neq -3$, entonces $r_A = 1 \neq r_{Ab} = 2$, y el sistema no tiene solución. ❑

$b)$ $4t-2y+z=1-x$
$z+y=-1$
$x=t+w$

$4t-2y+z+x=1$
$z+y=-1$
$x-t-w=0$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} z & y & w & t & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Luego

$$(A:b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow F_{21}(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que $r_A = 3 = r_{Ab} < n = 5$. Por lo tanto, el sistema posee infinitas soluciones, y para obtener tales soluciones debemos fijar $N - r_A = 5-3 = 2$ incógnitas.

Fijemos t y x.

El sistema equivalente que hemos obtenido es:

$z-2y+4t+x=1 \qquad (1)$
$3y-4t-x=-2 \qquad (2)$
$-w-t+x=0 \qquad (3)$

De (2) despejamos y en función de t y de x :

$$y = \frac{-2+4t+x}{3} \qquad (4)$$

De (3) despejamos w :

$$w = x - t$$

De (1) y de (4) despejamos z :

$$z = 1 + 2y - 4t - x \Rightarrow z = 1 + 2\,\frac{-2+4t+x}{3} - 4t - x \Rightarrow z = \frac{-1-4t-x}{3}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ w \\ t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-4t-x}{3} \\ \frac{-2+4t+x}{3} \\ x-t \\ t \\ x \end{pmatrix};\ t, x \in \mathbb{R} \quad \square$$

R18

$$(A:\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 & a+1 \\ -a & 1 & 0 & -a \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_{21}(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1-\frac{a}{3} & a+1 \\ -a & 1 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{F_{31}(\frac{a}{3})} \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1-\frac{a}{3} & a+1 \\ 0 & 1-\frac{a}{3} & \frac{a^2}{3} & -a \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_{32}(a-3)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & a & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1-\frac{a}{3} & a+1 \\ 0 & 0 & 3 & a^2-3a-3 \end{pmatrix}$$

$i)$ Tendremos única solución cuando $r_A = r_{Ab} = N = 3$
Observamos que no importando el valor de $a \in \mathbb{R}$, siempre tendremos única solución, pues $r_A = rango(A) = 3$, $r_{Ab} = rango(A:\boldsymbol{b}) = 3$ y $N = 3$. (El número de filas distintas de la nula no depende del valor que tome a).

$ii)$ y $iii)$ son casos que nunca se darán. $\square$

$\boxed{\text{R20}}$

Un sistema homogéneo cuadrado posee única solución cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, en caso contrario el sistema posee infinitas soluciones.

$$\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$$

Pero $a > 0$, luego existe sólo un valor de a $(a = 1)$ para el cual el sistema anterior posee infinitas soluciones ❑

4 VALORES Y VECTORES PROPIOS

Valores y Vectores Propios de una Matriz

Sea $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se define el valor propio, valor característico, autovalor o eigenvalor de una matriz cuadrada A como el número real o complejo λ tal que

$$A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$$

con $\boldsymbol{x} \neq \theta$ el vector propio, vector característico, autovector o eigenvector asociado a λ.

Para calcular los valores propios es común usar la definición alternativa :

$$|\,A\,-\lambda I\,| = 0$$

que es una ecuación polinomial cuyas soluciones son los valores propios de la matriz cuadrada A, con I la matriz idéntica del mismo orden que A.

Para calcular los vectores propios asociados a una valor propio λ se resuelve el sistema homogéneo :

$$(A - \lambda\,I)\,\boldsymbol{x} = \Theta$$

y este proceso se repite para cada uno de los valores propios.

Ejemplo 1.

Muestre que los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son $0,\ 1$ y $2.$

Solución:

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^3-(1-\lambda)=0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=0 \Rightarrow (1-\lambda)=0 \ \vee \ (1-\lambda)^2-1=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1=1 \ \vee 1-2\lambda+\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda_1=1 \ \vee \ \lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1=1 \ \vee \ \lambda(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \ \vee \ \lambda_2=1 \vee \ \lambda_3=2$$

Esto muestra que los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son $0,\ 1$ y $2.$ ❑

Ejemplo 2.

Calcule los vectores propios de $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos los valores propios de A.

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \left|\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$
$$(3-\lambda)(-2-\lambda)-1=0 \Rightarrow -6-\lambda+\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-7=0 \Rightarrow$$
$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+28}}{2} \Rightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=\frac{1+\sqrt{29}}{2}\\ \lambda_2=\frac{1-\sqrt{29}}{2}\end{cases}$$

Calculemos los vectores propios asociados a $\lambda_1=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$:

$$(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{x}_1=\theta \Rightarrow \begin{bmatrix}3-\lambda_1 & 1\\ 1 & -2-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix}\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2} & 1\\ 1 & -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Si $a=\frac{5}{2}$ y $b=\frac{\sqrt{29}}{2}$, se tiene que :

$$\begin{bmatrix}a-b & 1 & 0\\ 1 & -a-b & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-a+b)+F_1} \begin{bmatrix}0 & a^2-b^2+1 & 0\\ 1 & -a-b & 0\end{bmatrix}$$

Pero : $a^2-b^2+1=\frac{25}{4}-\frac{29}{4}+1=-1+1=0$

$$x_{11}-\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{12}=0 \Rightarrow x_{11}=\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{12}$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{12}\\ x_{12}\end{bmatrix}=x_{12}\begin{bmatrix}\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\\ 1\end{bmatrix},\ x_{12}\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Calculemos los vectores propios asociados a $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$:

$$(A-\lambda_2 I)\boldsymbol{x}_2=\theta \Rightarrow \begin{bmatrix}3-\lambda_2 & 1\\ 1 & -2-\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix}\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2} & 1\\ 1 & -\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Si $a=\frac{5}{2}$ y $b=\frac{\sqrt{29}}{2}$, se tiene que :

$$\begin{bmatrix}a+b & 1 & 0\\ 1 & -a+b & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(-a-b)+F_1} \begin{bmatrix}0 & a^2-b^2+1 & 0\\ 1 & -a+b & 0\end{bmatrix}$$

Sabemos ya que $a^2-b^2+1=0.$ Luego :

$$x_{21}-\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{22}=0 \Rightarrow x_{21}=\left(\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}\right)x_{22}$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2})x_{22} \\ x_{22} \end{bmatrix} = x_{22}\begin{bmatrix} \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} \\ 1 \end{bmatrix},\ x_{22} \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \square$$

Ejemplo 3.

Obtenga los valores propios de la matriz antisimétrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

Calculemos los valores propios de A :

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 1 - 1 - \lambda - \lambda - \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\sqrt{3}\,i \\ \lambda_3 = \sqrt{3}\,i \end{cases} \quad \square$$

Ejemplo 4.

Calcule los valores y vectores propios de una matriz simétrica de orden 2 distinta de la nula.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

Calculemos los valores propios de A

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left|\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \left|\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0 \Rightarrow ac - (a+c)\lambda + \lambda^2 - b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} \Rightarrow$$

$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2+2ac+c^2-4ac+4b^2}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{a^2-2ac+c^2+4b^2}}{2} \Rightarrow$

$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$

Notamos que los valores propios son reales y distintos, porque $b \neq 0$ y $(a-c)^2 + 4b^2 > 0$

Los valores propios son : $\lambda_1 = \frac{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$

Calculemos los vectores propios

Sean $P = (a-c)^2 + 4b^2$; $R = \frac{c}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2}$; $S = \frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda_1 & b \\ b & c-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2} & b & 0 \\ b & \frac{c}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(-R/b)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2} & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{11}\left(\frac{a}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2}\right) + bx_{12} = 0 \Rightarrow x_{12} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{P}}{2}}{b} x_{11}$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}}{b} x_{11} \end{bmatrix}, \; x_{11} \in \mathbb{R}$$

De manera similar :

$$\begin{bmatrix} a-\lambda_2 & b \\ b & c-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2} & b & 0 \\ b & \frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1(-S/b)+F_2}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{2} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2} & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{21}\left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}\right) + bx_{22} = 0 \Rightarrow x_{22} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}}{b} x_{21}$$

$$\therefore \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ \frac{\frac{c}{2} - \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{P}}{2}}{b} x_{21} \end{bmatrix}, \; x_{21} \in \mathbb{R} \quad \square$$

Ejemplo 5.
Verifique la veracidad de la siguiente afirmación:

$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ es un vector propio de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ con valor propio asociado igual a $-\sqrt{2}$

Solución:

Comprobemos si $A\boldsymbol{x}$ es igual a $\lambda\boldsymbol{x}$, donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ y $\lambda = -\sqrt{2}$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\lambda\,\boldsymbol{x} = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Finalmente notamos que $A\boldsymbol{x} \neq \lambda\ \boldsymbol{x}$, y esto muestra que lo que se dice es falso. ❑

Ejemplo 6.
Calcule los valores propios de $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

Solución:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \left|\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \left|\begin{bmatrix} a-\lambda & a \\ a & a-\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$(a-\lambda)(a-\lambda) - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a\lambda + \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2a\lambda = 0 \Rightarrow$$

$\lambda(\lambda - 2a) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ ó $\lambda_2 = 2a$ ❑

EJERCICIOS VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

1

Muestre que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es simétrica y con elementos de la diagonal principal iguales, entonces los valores propios son siempre reales.

2

Calcule los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3

Muestre que si A es una matriz cuadrada de orden $3,$ tal que

$$a_{i\,j} = \begin{cases} -1 & \text{, si } i \leq j \\ 1 & \text{, si } i > j \end{cases}$$

entonces A posee sólo valores propios complejos.

4

Calcule los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

5

Muestre que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ posee valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n,$ entonces $det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdot \cdot \lambda_n$

$\boxed{6}$

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Obtenga los vectores propios de A.

$\boxed{7}$

Obtenga los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{8}$

Muestre que los valores propios de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, son números reales.

$\boxed{9}$

Verifique la veracidad de la afirmación: "Todas las matrices tridiagonales poseen valores propios reales".

$\boxed{10}$

Explique si es verdad o mentira que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es tal que $A^2 = A$, entonces sus valores propios son siempre complejos.

Algunos Ejercicios Resueltos
Valores y Vectores Propios de Matrices

R6

Antes de calcular los vectores propios de A, debemos calcular sus valores propios.

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\left|\begin{bmatrix}2&1\\3&6\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right|=0\Rightarrow\left|\begin{bmatrix}2-\lambda&1\\3&6-\lambda\end{bmatrix}\right|=0\Rightarrow$$

$$(2-\lambda)(6-\lambda)-3=0\Rightarrow 12-8\lambda+\lambda^2-3=0\Rightarrow\lambda^2-8\lambda+9=0\Rightarrow$$

$$\lambda=\tfrac{8\pm\sqrt{64-36}}{2}\Rightarrow\lambda=\tfrac{8\pm\sqrt{28}}{2}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=4+\sqrt{7}\\\lambda_2=4-\sqrt{7}\end{cases}$$

Calculemos los vectores propios.

Para $\lambda_1=4+\sqrt{7}$:

$$(A-\lambda_1 I)\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2-4-\sqrt{7}&1\\3&6-4-\sqrt{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}-2-\sqrt{7}&1\\3&2-\sqrt{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Sabemos que este sistema posee infinitas soluciones, eso significa que podemos quedarnos con cualquiera de las dos ecuaciones y despejar una incógnita en términos de la otra.

De la primera ecuación, fijando x_{11} :

$(-2-\sqrt{7})\,x_{11}+x_{21}=0\Rightarrow x_{21}=\ (2+\sqrt{7})\,x_{11}$

Por lo tanto, los vectores propios asociados a $\lambda_1=4+\sqrt{7}$ son :

$$\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}\\(2+\sqrt{7})\,x_{11}\end{bmatrix}=x_{11}\begin{bmatrix}1\\2+\sqrt{7}\end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2=4-\sqrt{7}$:

$$(A-\lambda_2 I)\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2-4+\sqrt{7}&1\\3&6-4+\sqrt{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2+\sqrt{7} & 1 \\ 3 & 2+\sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la primera ecuación, fijando x_{12} :

$$(-2+\sqrt{7})\,x_{12} + x_{22} = 0 \Rightarrow x_{22} = \ (2-\sqrt{7})\,x_{12}$$

Por lo tanto, los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 4 - \sqrt{7}$ son :

$$\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ (2-\sqrt{7})\,x_{12} \end{bmatrix} = x_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{7} \end{bmatrix} \quad \square$$

R7

Calculemos los valores propios.

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -7 & 7 \\ 4 & -3-\lambda & 4 \\ 4 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda) - 112 - 28$$

$$-28(-3-\lambda) + 4(5-\lambda) + 28(2-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$(-15-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) + 20 - 4\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$-30 + 11\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 20 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \ -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10 = 0$$

Observamos que $\lambda = 1$ es raíz del polinomio característico

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10$$

Usando división sintética:

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda - 10 : \lambda - 1 = \ -\lambda^2 + 3\lambda + 10$$
$$-{}^{(+)}\lambda^3 + {}^{(-)}\lambda^2$$

$-----------$
$3\lambda^2+7\lambda-10$
$^{(-)}3\lambda^2-{}^{(+)}3\lambda$
$-----------$
$10\lambda-10$
$^{(-)}10\lambda-{}^{(+)}10$
$-----------$
0

Por lo tanto,

$$-\lambda^3+4\lambda^2+7\lambda-10=(\lambda-1)(-\lambda^2+3\lambda+10)$$

Así, $-\lambda^3+4\lambda^2+7\lambda-10=0 \Rightarrow (\lambda-1)(-\lambda^2+3\lambda+10)=0 \Rightarrow$

$\lambda_1=1,\ -\lambda^2+3\lambda+10=0$

Ahora: $-\lambda^2+3\lambda+10=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9+4(10)}}{2} \Rightarrow$

$$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{49}}{2} \Rightarrow \lambda=\frac{3\pm7}{2} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_2=\frac{10}{2}=5\\ \lambda_3=\frac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

Por lo tanto, los valores propios son $:\lambda_1=1,\ \lambda_2=5,\ \lambda_3=-2.$

Calculemos los vectores propios.

Para $\boldsymbol{\lambda_1=1}$:

$$(A-\lambda_1 I)\,x_1=\theta \Rightarrow \begin{bmatrix}5-\lambda_1 & -7 & 7\\ 4 & -3-\lambda_1 & 4\\ 4 & -1 & 2-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}5-1 & -7 & 7\\ 4 & -3-1 & 4\\ 4 & -1 & 2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}4 & -7 & 7\\ 4 & -4 & 4\\ 4 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim^{F_{21}(-1),\, F_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim^{F_{32}(-2)} \begin{bmatrix} 4 & -7 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$3x_{12} - 3x_{13} = 0 \Rightarrow x_{12} = x_{13}$$

$$4x_{11} - 7x_{12} + 7x_{13} = 0 \Rightarrow 4x_{11} - 7x_{13} + 7x_{13} = 0 \Rightarrow x_{11} = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{13} \\ x_{13} \end{bmatrix} = x_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_{13} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_2 = 5$:

$$(A - \lambda_2 I)\, x_2 = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} 5-\lambda_2 & -7 & 7 \\ 4 & -3-\lambda_2 & 4 \\ 4 & -1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5-5 & -7 & 7 \\ 4 & -3-5 & 4 \\ 4 & -1 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim^{F_{23}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 0 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim^{F_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$-7x_{22} + 7x_{23} = 0 \Rightarrow x_{22} = x_{23}$$

$$4x_{21} - x_{22} - 3x_{23} = 0 \Rightarrow 4x_{21} - x_{23} - 3x_{23} = 0 \Rightarrow 4x_{21} = 4x_{23} \Rightarrow x_{21} = x_{23}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{23} \\ x_{23} \\ x_{23} \end{bmatrix} = x_{23} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_{23} \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Para $\lambda_3 = -2$:

$$(A-\lambda_3 I)\,x_3 = \theta \Rightarrow \begin{bmatrix} 5-\lambda_3 & -7 & 7 \\ 4 & -3-\lambda_3 & 4 \\ 4 & -1 & 2-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5-(-2) & -7 & 7 \\ 4 & -3-(-2) & 4 \\ 4 & -1 & 2-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim^{F_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim^{F_{21}(-\frac{4}{7})} \begin{bmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$7x_{31} - 7x_{32} + 7x_{33} = 0 \Rightarrow 7x_{31} + 7x_{33} = 0 \Rightarrow x_{31} = -x_{33}$$

$$3x_{32} = 0 \Rightarrow x_{32} = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{33} \\ 0 \\ x_{33} \end{bmatrix} = x_{33} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_{33} \in \mathbb{R} - \{0\} \ \square$$