UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA AGRÍCOLA
DEPTO. DE AGROINDUSTRIAS
Juan Carlos Sandoval Avendaño

PAUTA TEST N° 4 CÁLCULO 1 CÁLCULO DIFERENCIAL
INGENIERÍA AMBIENTAL — INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE :____ CARRERA:________
TIEMPO MÁXIMO : 40 MINUTOS FECHA : Mi 03/05/23

$1)$ Dada la cónica $-2x^2+y^2-4x-2y=3$, obtenga los focos, el centro y los vértices. Esboce la gráfica de la cónica anterior.

(30 puntos)

Solución:

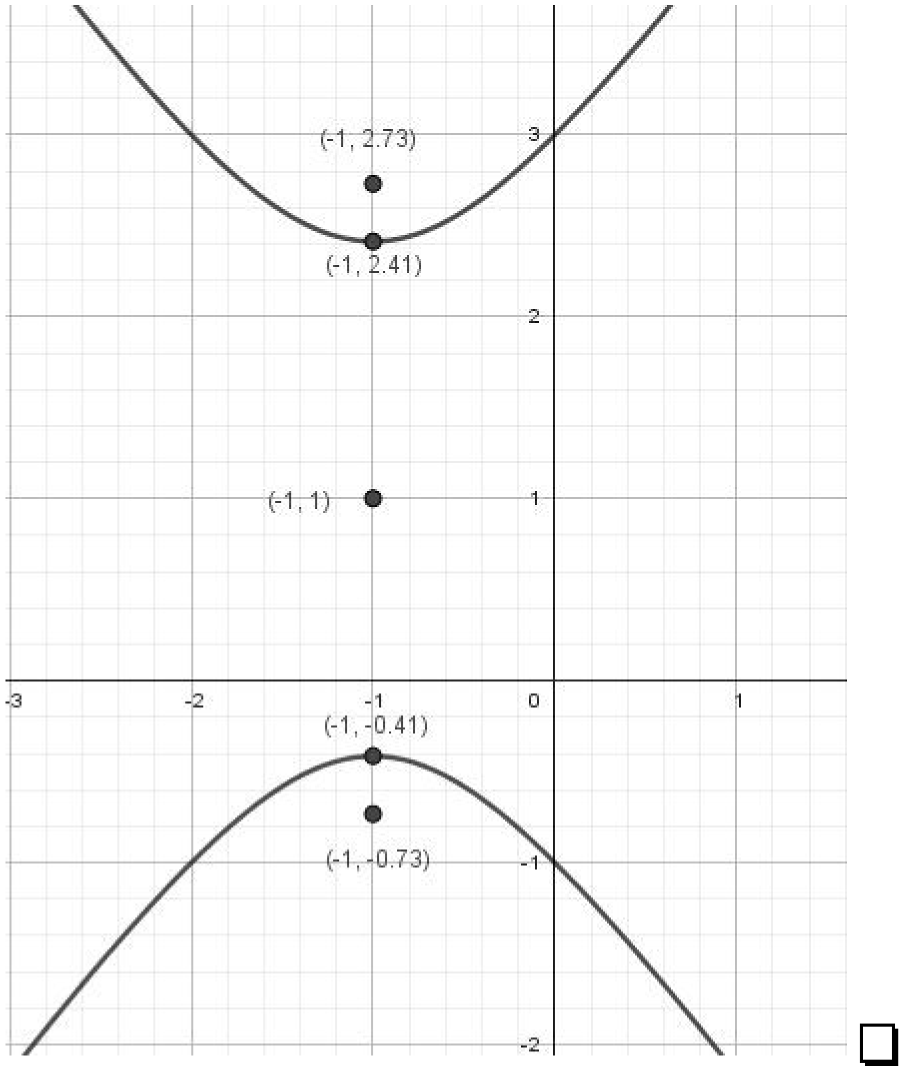
Completemos cuadrados para escribir la cónica en forma canónica
$-2x^2+y^2-4x-2y=3 \Rightarrow (-2x^2-4x)+(y^2-2y)=3 \Rightarrow$
$-2(x^2+2x)+(y^2-2y)=3 \Rightarrow -2(x+1)^2+(y-1)^2=3-2+1 \Rightarrow$
$-2(x+1)^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{2}-(x+1)^2=1$

Tenemos que $a^2=2$, luego $a=\sqrt{2}\approx 1.4$; además $b^2=1$, es decir, $b=1$
Por otro lado, $c^2=a^2+b^2$, luego $c^2=2+1=3$, es decir, $c=\sqrt{3}$

De la ecuación canónica observamos que el centro $C=(h,k)=(-1,1)$

Los vértices tienen coordenadas
$V_1=(h,k+a)=(-1,1+\sqrt{2})\approx(-1,2.4)$
$V_2=(h,k-a)=(-1,1-\sqrt{2})\approx(-1,-0.4)$

Los focos tienen coordenadas
$F_1=(h,k+c)=(-1,1+\sqrt{3})\approx(-1,2.7)$
$F_2=(h,k-c)=(-1,1-\sqrt{3})\approx(-1,-0.7)$



$2)$ Esboce la gráfica de $x^2+2y^2-4x+y=1,$ indicando las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices.
Además anote las intersecciones con los ejes.

(30 puntos)

<u>Solución:</u>

Completemos cuadrados para obtener la ecuación canónica

$x^2+2y^2-4x+y=1 \Rightarrow (x^2-4x)+(2y^2+y)=1 \Rightarrow (x^2-4x)+2(y^2+\frac{1}{2}y)=1$

$\Rightarrow (x-2)^2+2(y+\frac{1}{4})^2=1+4+\frac{1}{8} \Rightarrow (x-2)^2+2(y+\frac{1}{4})^2=\frac{41}{8} \Rightarrow$

$\frac{(x-2)^2}{2}+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{41}{16} \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{2(\frac{41}{16})}+\frac{(y+\frac{1}{4})^2}{\frac{41}{16}}=1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{41}{8}}+\frac{(y+\frac{1}{4})^2}{\frac{41}{16}}=1$

De la ecuación canónica se observa que el centro $C=(h,k)=(2,\,-\frac{1}{4})$

Además $a^2 = \frac{41}{8}$, es decir, $a = \sqrt{\frac{41}{8}} \approx 2.3$ y $b^2 = \frac{41}{16}$, es decir, $b = \sqrt{\frac{41}{16}} \approx 1.6$

Para la elipse se tiene que $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{41}{8} - \frac{41}{16} = \frac{41}{16}$, es decir, $c = \sqrt{\frac{41}{16}} \approx 1.6$

Los vértices tienen coordenadas

$$V_1 = (h+a,k) = (2+\sqrt{\tfrac{41}{8}},\, -\tfrac{1}{4}) \approx (4.3,\, -0.25)$$
$$V_2 = (h-a,k) = (2-\sqrt{\tfrac{41}{8}},\, -\tfrac{1}{4}) \approx (\,-0.3,\, -0.25)$$
$$V_3 = (h,k+b) = (2,\, -\tfrac{1}{4}+\sqrt{\tfrac{41}{16}}) \approx (2, 1.35)$$
$$V_4 = (h,k-b) = (2,\, -\tfrac{1}{4}) \approx (\,-0.3,\, -1.85)$$

Los focos tienen coordenadas

$$F_1 = (h+c,k) = (2+\sqrt{\tfrac{41}{16}},\, -\tfrac{1}{4}) \approx (3.6,\, -0.25)$$
$$F_2 = (h-c,k) = (2-\sqrt{\tfrac{41}{16}},\, -\tfrac{1}{4}) \approx (0.4,\, -0.25)$$

Intersecciones con los ejes

Eje $x:\ y = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 - 4x + y = 1 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} \Rightarrow$
$x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{2(2 \pm \sqrt{5})}{2} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5} \Rightarrow$

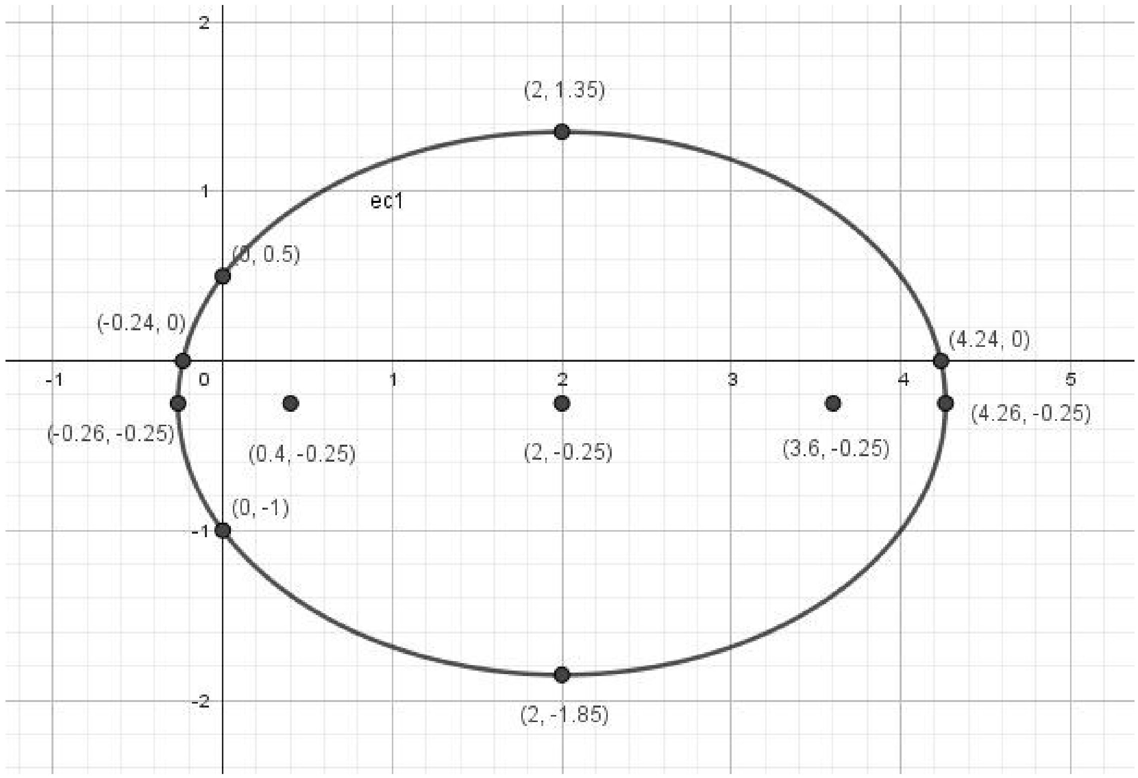
$$\begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{5} \approx 4.24 \\ x_2 = 2 - \sqrt{5} \approx -0.24 \end{cases}$$

$P_1 = (2+\sqrt{5}, 0)$; $P_2 = (2-\sqrt{5}, 0)$

Eje $y:\ x = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 - 4x + y = 1 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Rightarrow$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 \\ x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$P_3 = (0, \frac{1}{2})$; $P_4 = (0, -1)$


(2, 1.35)
ec1
(0, 0.5)
(-0.24, 0)
(4.24, 0)
(-0.26, -0.25)
(0.4, -0.25)
(2, -0.25)
(3.6, -0.25)
(4.26, -0.25)
(0, -1)
(2, -1.85)
-1
0
1
2
3
4
5
2
1
-1
-2