

PAUTA CERTAMEN N° 1 CÁLCULO 1 CÁLCULO DIFERENCIAL
INGENIERÍA AMBIENTAL – INGENIERÍA CIVIL AGRÍCOLA

NOMBRE : _____ **CARRERA:** _____
TIEMPO MÁXIMO : 1 HORA 30 MINUTOS **FECHA : Mi 19/04/23**

1) Responda V (Verdadero) o F (Falso), justificando todas sus respuestas.

a) F El triángulo con vértices $(2, -1)$, $(3, 2)$ y $(1, -1)$ es isósceles

Justificación:

Sean $A = (2, -1)$, $B = (3, 2)$ y $C = (1, -1)$

$$d(A, B) = \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$d(B, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Los tres lados del triángulo tienen distintas dimensiones por lo que no es isósceles. ☐

b) V Existen dos puntos de intersección entre $y = x - 1$ y $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 1$

Justificación:

Reemplazando $y = x - 1$ en la ecuación $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 1$, se tiene

$$x^2 + y^2 - 3x + 2y = 1 \Rightarrow x^2 + (x-1)^2 - 3x + 2(x-1) = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 - 3x + 2x - 2 = 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Rightarrow$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

El haber obtenido dos valores para x reales, significa que existen dos puntos de intersección. ☐

c) V Las rectas $ax - y = 2$ y $x + ay = 7$ son perpendiculares, no importando el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$

Justificación:

Obtengamos la pendiente de la recta $ax - y = 2$

$$ax - y = 2 \Rightarrow y = ax - 2$$

La pendiente de esta primera recta es $m_1 = a$

Obtengamos ahora la pendiente de la segunda recta $x + ay = 7$

$$x + ay = 7 \Rightarrow ay = 7 - x \Rightarrow y = \frac{7}{a} - \frac{1}{a}x$$

Esta última expresión es válida para $a \neq 0$

Para $a \neq 0$, se tiene que $m_2 = -\frac{1}{a}$

$$\text{Luego } m_1 \cdot m_2 = a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$$

Esto muestra que las rectas son perpendiculares si $a \neq 0$

Ahora, si $a = 0$, entonces las rectas son $y = -2$ y $x = 7$, que también son perpendiculares.

Lo anterior muestra que las rectas $ax - y = 2$ y $x + ay = 7$ son perpendiculares, no importando el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ $\square$

d) F La circunferencia con centro en $(1, 2)$ y que es tangente a la recta $4x = -3y + 6$ posee radio igual a $\frac{1}{\sqrt{17}}$

Justificación:

El radio de la circunferencia coincide con la distancia desde el centro a la recta tangente.

La recta tangente es $L : 4x + 3y = 6$

$$d(L, (1, 2)) = \frac{|4(1) + (3)(2) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4 + 6 - 6|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \neq \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \square$$

(40 puntos)

2) Obtenga el vértice, el foco y la directriz de $3x + 2y^2 = 5y$

(10 puntos)

Solución:

Completemos cuadrados

$$\begin{aligned} 3x + 2y^2 = 5y &\Rightarrow 3x + 2y^2 - 5y = 0 \Rightarrow 3x + 2\left(y^2 - \frac{5}{2}y\right) = 0 \Rightarrow 3x + 2\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{8} \\ &\Rightarrow 2\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{8} - 3x \Rightarrow 2\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = -3x + \frac{25}{8} \Rightarrow 2\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = -3\left(x - \frac{25}{24}\right) \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{25}{24}\right)$$

De la ecuación canónica se tiene que el vértice es $V = \left(\frac{25}{24}, \frac{5}{4}\right)$ y además

$$4p = \frac{3}{2}, \text{ es decir, } p = \frac{3}{8}$$

La parábola se orienta hacia la izquierda, es decir, el eje de simetría es paralelo al eje horizontal.

$$\text{Las coordenadas del foco son } F = \left(\frac{25}{24} - \frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{4}\right)$$

La ecuación de la directriz es $x = \frac{25}{24} + \frac{3}{8} = \frac{17}{12}$ $\square$

3) Obtenga el conjunto solución de $\left| \frac{x+3}{x-1} \right| \geq 5$

(10 puntos)

Solución:

$$\left| \frac{x+3}{x-1} \right| \geq 5 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} \geq 5 \vee \frac{x+3}{x-1} \leq -5$$

Parte 1 : $\frac{x+3}{x-1} \geq 5 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} - 5 \geq 0 \Rightarrow \frac{x+3-5x+5}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-4x+8}{x-1} \geq 0$

$$-4x + 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$-4x + 8$	+	4	+	0	-
$x - 1$	-	0	+	1	+
$\frac{-4x+8}{x-1}$	-	<i>indet.</i>	+	0	-

$$S_1 = (1, 2]$$

Parte 2 : $\frac{x+3}{x-1} \leq -5 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} + 5 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+3+5x-5}{x-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{6x-2}{x-1} \leq 0$

$$6x - 2 = 0 \Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

	$x < \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$6x - 2$	-	0	+	4	+
$x - 1$	-	$-\frac{2}{3}$	-	0	+
$\frac{6x-2}{x-1}$	+	0	-	<i>indet.</i>	+

$$S_2 = \left[\frac{1}{3}, 1 \right)$$

Finalmente el conjunto solución es $S = S_1 \cup S_2 = (1, 2] \cup \left[\frac{1}{3}, 1 \right)$ $\square$