EJERCICIOS ÁLGEBRA LINEAL

1) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matriz definida de la siguiente manera:

$$a_{i\,1} = 2^i \,,\; i = 1,2,3$$
$$a_{i\,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{(i+j-1)} \;,\; i = 1,2,3;\; j = 2,3$$

a) Escriba explícitamente la matriz A.

b) Emplee operaciones elementales para determinar si esta matriz es inversible y encuentre la inversa en caso de que lo sea.

c) ¿Es triangular?

2) Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$a)$ Calcule $A^3 - 3\,B^2 + 10\,I_3$

$b)$ Emplee operaciones elementales para determinar si la matriz B es invertible y encuentre la inversa en caso de que lo sea.

$c)$ Calcule $(AB)^T$ y compare el resultado con $B^T\,A^T$.

3) Se dice que una matriz cuadrada A es $ortogonal$ ssi $A^{-1} = A^T$.

Muestre que: $A = \begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & sen\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\,sen\alpha & 0 & cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

es ortogonal, utilizando operaciones elementales.

4) Sea $R(\beta) = \begin{pmatrix} cos\beta & -\,sen\beta \\ sen\beta & cos\beta \end{pmatrix}$. Calcule:

$a)$ $R(\beta_1)\,R(\beta_2)$ $b)$ $R(\beta_1+\beta_2)$ $c)$ $R(\beta_1)+R(\beta_2)$ $d)$ $R(\beta)^{\,2}$

5) Hallar todas las matrices que conmuten en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

6) Muestre que la propiedad $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$ se verifica para

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

7) Encuentre matrices en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que verifiquen las propiedades siguientes:

$a)$ $A\,B = \Theta\,;\; A \neq \Theta\,;\; B \neq \Theta$

$b)$ $A^2 = \Theta;\; A \neq \Theta$

$c)$ $A\,B = \Theta\;\; y\;\; B\,A \neq \Theta$

$d)$ $A^2 = A\;;\; A \neq I_2$

$e)$ $A\,B = A\,C\,;\; B \neq C$

$f)$ $A^T = A\,;\; A \neq I_2$

$g)$ $A\,B = I_2\,; A \neq I_2$

Obs.: 1) Θ representa la matriz nula. 2) I_2 representa la matriz identidad de orden 2.

$8)$ Considere dos matrices triangular superior de orden n. ¿Qué sucede con la suma y con el producto?.
Haga el mismo estudio anterior para matrices diagonales y escalares. ¿Qué concluye?.

$9)$ Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que $|A| = 1$, para $A = \begin{pmatrix} cos\alpha & sen\alpha \\ 1 & cos\alpha \end{pmatrix}$

$10)$ Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -\frac{1}{i} \\ -i^2 & -\frac{3i}{(i+1)^3} \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} \frac{2-i}{1-i} & -\frac{1}{i^3} \\ 2+i & 2i \end{bmatrix}$$

Calcule $A\,B$; $B\,A$; A^2 ; B^2 ; $(A+B)^2$; $(A-B)^2$; $(i-1)\,A$.

$11)$ Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ donde a, b y c son constantes reales.

$a)$ Hallar condiciones (si es que existen) para a, b y c de modo que A sea invertible.
$b)$ Encontrar, si existe, una matriz P tal que PA^{-1} sea diagonal.

$12)$ ¿Para qué valores de λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene:
$a)$ ninguna solución $b)$ solución única $c)$ infinitas soluciones

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (\lambda^2 - 14)z &= \lambda + 2 \end{aligned}$$

$13)$ Resuelva el sistema
$3x_1 - 2x_2 = -x_3 + 1$
$x_3 - x_2 = 5x_1 - 6$
$x_2 + 3x_3 = 4x_1 - 4$
usando : $a)$ Gauss $b)$ Jordan $c)$ Cramer $d)$ El método de la inversa

$14)$ Encuentre los valores de $x \in \mathbb{R}$, si existen, de modo que el sistema
$\begin{pmatrix} x-1 & x-1 \\ x+2 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
tenga solución única.

$15)$ Hallar x, y, z y w si $3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$

$16)$ Calcule los valores y vectores propios de :

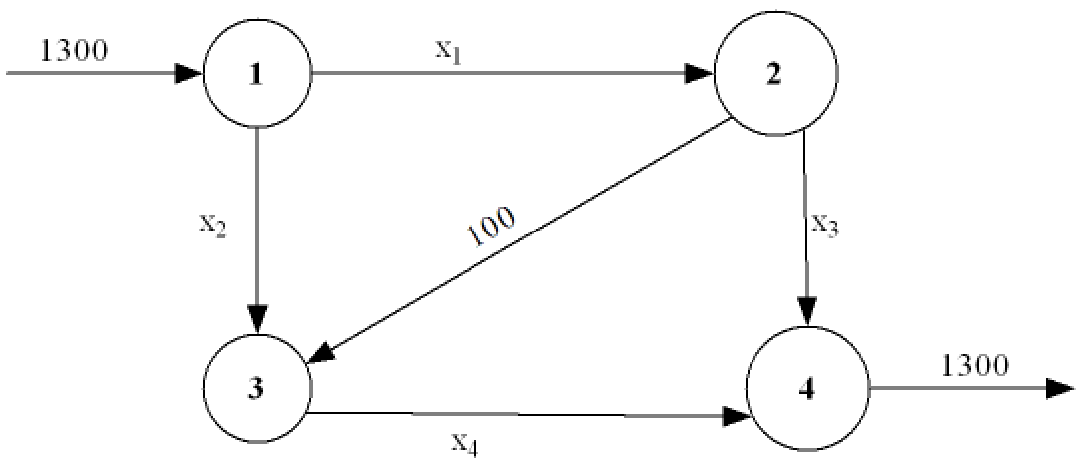
$a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $b)$ I_2 $c)$ una matriz antisimétrica de orden 2

17) Resuelva el sistema
$2x - y + 3z - t + u = 2$
$-2y + 6z + 4x - 2u - 2t = 4$
$2t - z - y + 2x = 0$
$2x + 7z - y + 2u - 4t = 4$
$4z - 3t + u = 2$

18) Encuentre el valor de $''a''$, si existe, para que el sistema tenga:
$a)$ única solución $b)$ ninguna solución $c)$ infinitas soluciones (¡encuéntrelas!)

$$3x + y - z = 1$$
$$x + y + 2z = 1$$
$$4x + 2y + (a^2 - 3)z = a + 1$$

19) El agua fluye a través de una red de tuberías, en miles de metros cúbicos por hora, como se muestra en la siguiente figura



$a)$ Calcule el flujo de agua donde es desconocido.
$b)$ Calcule el flujo cuando $x_3 = 200$. Explique brevemente lo que sucede en este caso.

20) Responda Verdadero (V) o Falso (F), **justificando todas sus respuestas**

$a)$ ____ La matriz $\begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es singular si $a_0 \neq a_1 \neq a_2$.

$b)$ ____ Si $|A| = -1$, y se realizan las siguientes operaciones: invierto, luego intercambio las filas 1 y 10, luego traspongo, luego multiplico la fila 1 por -1, y finalmente sumo 5 veces la fila 3 a la 11. Entonces el determinante de la matriz obtenida es 4.

$c)$ ____ $|A + B|^2 = |A^2 + B^2|; \ \forall A, \ B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$d)$____ El producto de dos matrices triangulares es siempre conmutativo.

$e)$ ____ La inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ posee elemento igual a $\frac{1}{2}$ en la posición $(1,3)$.

$f)$____ Si $R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces $|R \cdot R^T + 3\,I| > 0$

$g)$ ______ $|Adj(A)| = 1$, si $A = \begin{pmatrix} -a & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $a \neq 0$.

$h)$ ______ Si $A = (a_{i\,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $B = (b_{i\,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, con
$a_{i\,j} = \begin{cases} -1 & , i > j \\ 1 & , i \leq j \end{cases}$; $b_{i\,j} = \frac{i}{i+j}$, entonces $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

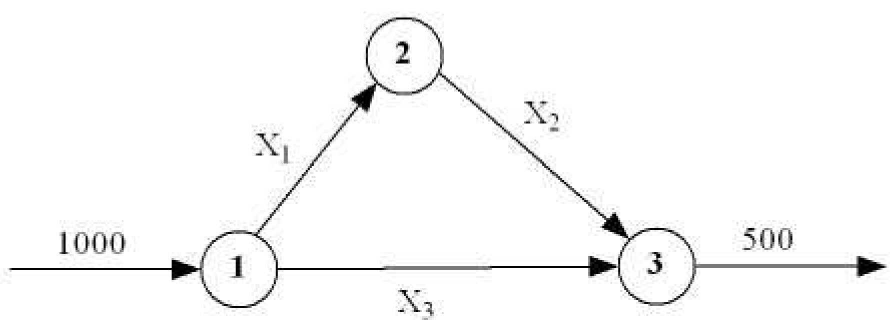
$i)$ ______ Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, entonces la segunda fila de $(A^3)^{-1}$ es distinta de la nula.

$j)$ _____ Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ se obtiene el mensaje codificado $\overline{\boldsymbol{x}}$ y si se usa la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ se obiene $\overline{\boldsymbol{y}}$.

Si $\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 56 \\ 62 & 9 & 92 \\ 32 & 82 & 36 \\ 24 & 86 & 20 \\ 32 & -16 & 64 \end{bmatrix}$, entonces el mensaje original contiene una X.

$k)$______ El mensaje codificado
$[4, 32, 36, -2, 30, 19, 15, -30, 65, 1, -2, 55, 11, 30, 19]$,
usando $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, contiene sólo 3 vocales.

$l)$ ______ La red



no posee flujos negativos.