



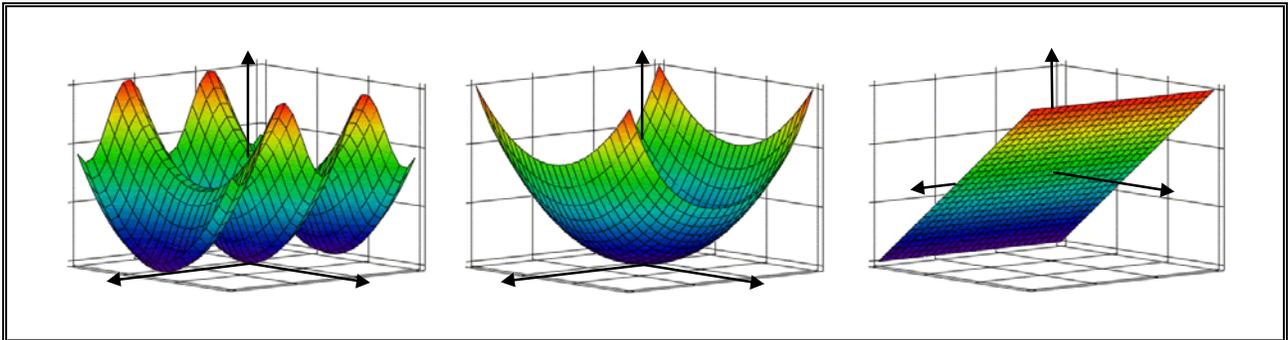
---

# Apuntes

## Introducción al Análisis de Sistemas No-Lineales

### 543 703

---



*9<sup>na</sup> edición*

© *Prof. José R. Espinoza C.*

Agosto 2009

## Tabla de contenidos.

PRÓLOGO .....	III
NOMENCLATURA .....	IV
ABREVIACIONES .....	VII
1 INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS NO-LINEALES. ....	1
1.1 <i>Conceptos básicos.</i> .....	1
1.2 <i>Ejemplos Clásicos de Sistemas No-Lineales</i> .....	4
1.3 <i>Restricciones a los Sistemas a Estudiar</i> .....	7
1.4 <i>Definiciones y Propiedades Preliminares</i> .....	8
1.5 <i>Análisis en el Plano de Fase</i> .....	10
1.6 <i>Alcances del Curso 543 703.</i> .....	16
2 FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE LYAPUNOV. ....	18
2.1 <i>Conceptos de Estabilidad.</i> .....	18
2.2 <i>Linealización y Estabilidad Local</i> .....	19
2.3 <i>Método Directo de Lyapunov.</i> .....	21
2.4 <i>Análisis de Sistemas Basados en el Método Directo de Lyapunov.</i> .....	27
2.5 <i>Diseño de Sistemas Basado en Lyapunov.</i> .....	29
3 TEORÍA DE ESTABILIDAD AVANZADA. ....	32
3.1 <i>Conceptos de Estabilidad.</i> .....	32
3.2 <i>Análisis de Sistemas No-autónomos</i> .....	33
3.3 <i>Teoremas para la Inestabilidad.</i> .....	38
3.4 <i>Análisis usando Lema de Barbalat</i> .....	39
4 ANÁLISIS UTILIZANDO FUNCIONES DESCRIPTORAS.....	42
4.1 <i>Introducción.</i> .....	42
4.2 <i>No-linealidades Comunes y sus Funciones Descriptoras.</i> .....	46
4.3 <i>Análisis de Sistemas utilizando Funciones Descriptoras.</i> .....	49
5 CONTROL REALIMENTADO. ....	54
5.1 <i>Introducción.</i> .....	54
5.2 <i>Diseño vía Linealización.</i> .....	55
5.3 <i>Diseño Vía Ganancia Programada.</i> .....	62
6 LINEALIZACIÓN EXACTA VÍA REALIMENTACIÓN. ....	68
6.1 <i>Conceptos Básicos.</i> .....	68
6.2 <i>Herramientas Matemáticas.</i> .....	76
6.3 <i>Linealización de los Estados de Entrada.</i> .....	78
6.4 <i>Linealización de Entrada-Salida.</i> .....	81
6.5 <i>Sistemas MIMO.</i> .....	86
BIBLIOGRAFÍA.....	88
ÍNDICE ALFABÉTICO.....	89

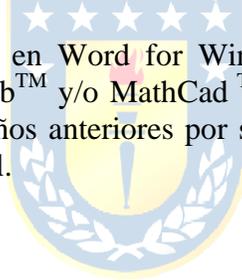
## Prólogo.

El curso "*Introducción al Análisis de Sistemas No-lineales*" es electivo de las carreras de Ingeniería Civil Eléctrica y Electrónica y de los programas de Magíster en Ciencias y Doctorado en Ingeniería, ambos con mención en Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Concepción. Este ramo pertenece al plan de asignaturas orientadas al Área de Control Automático en el cual se entregan herramientas de análisis para *sistemas no-lineales, dinámicos, invariantes y variantes en el tiempo* tipo **SISO** y **MIMO** y es la extensión natural del curso "*Síntesis de Sistemas de Control*" en el cual se revisan sistemas lineales tipo **MIMO**.

Los tópicos revisados en este curso permiten analizar sistemas que se caracterizan por tener estructuras no-lineales – y por lo tanto reflejan mejor la realidad física de los sistemas – para lo cual se asume conocido su modelo. En particular, aquí se abordan temas como la *teoría de Lyapunov para sistemas invariantes y variantes en el tiempo*, la *Función Descriptora*, *diseño de controladores mediante técnicas lineales*, y *diseño de controladores mediante técnicas no-lineales*.

El lector debe tener dominio de los temas entregados en los cursos de *Sistemas Lineales Dinámicos*, *Sistemas de Control* y *Síntesis de Sistemas de Control* para avanzar fluidamente en los tópicos de este texto. Además, un holgado manejo de programas de simulación es definitivamente necesario para seguir los ejemplos del apunte. Se recomienda, MatLab<sup>TM</sup> y/o MathCad<sup>TM</sup>.

El documento fue digitado enteramente en Word for Windows de MicroSoft<sup>TM</sup> y los ejemplos y ejercicios fueron desarrollados en MatLab<sup>TM</sup> y/o MathCad<sup>TM</sup>. Se desea agradecer sinceramente a los alumnos que cursaron la asignatura en años anteriores por su comprensión y cooperación en corregir las versiones preliminares de este material.



### Dr. José R. Espinoza C.

Profesor Titular  
Depto. de Ingeniería Eléctrica, of. 220  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de Concepción  
Casilla 160-C, Correo 3  
Concepción, CHILE

Tel: +56 (41) 2203512

Fax: +56 (41) 2246999

e-mail: Jose.Espinoza@UdeC.cl

web: <http://www.udec.cl/jose.espinoza>

## Nomenclatura

### Matrices

<b>A</b>	: matriz de parámetros de dimensión $n \cdot n$ .
<b>B</b>	: matriz de parámetros de dimensión $n \cdot p$ .
<b>C</b>	: matriz de parámetros de dimensión $q \cdot n$ .
<b>D</b>	: matriz de parámetros de dimensión $q \cdot p$ .
<b>E</b>	: matriz de parámetros de dimensión $n \cdot m$ .
<b>F</b>	: matriz de parámetros de dimensión $q \cdot m$ .
<b>T</b>	: matriz de transformación de dimensión de $n \cdot n$ .
<b>A<sub>T</sub></b>	: matriz de parámetros transformada mediante <b>T</b> de dimensión $n \cdot n$ . <b>A<sub>T</sub></b> = <b>TAT</b> <sup>-1</sup>
<b>B<sub>T</sub></b>	: matriz de parámetros transformada mediante <b>T</b> de dimensión $n \cdot p$ . <b>B<sub>T</sub></b> = <b>TB</b>
<b>C<sub>T</sub></b>	: matriz de parámetros transformada mediante <b>T</b> de dimensión $q \cdot n$ . <b>C<sub>T</sub></b> = <b>CT</b> <sup>-1</sup>
<b>D<sub>T</sub></b>	: matriz de parámetros transformada mediante <b>T</b> de dimensión $q \cdot p$ . <b>D<sub>T</sub></b> = <b>D</b>
<b>E<sub>T</sub></b>	: matriz de parámetros transformada mediante <b>T</b> de dimensión $n \cdot m$ . <b>E<sub>T</sub></b> = <b>TE</b>
<b>F<sub>T</sub></b>	: matriz de parámetros transformada mediante <b>T</b> de dimensión $q \cdot m$ . <b>F<sub>T</sub></b> = <b>F</b>
<b>T<sub>abc-αβ0</sub></b>	: matriz de transformación de ejes <i>abc</i> a $\alpha\beta 0$ , dimensión 3·3.
<b>T<sub>αβ0-abc</sub></b>	: matriz de transformación de ejes $\alpha\beta 0$ a <i>abc</i> , dimensión 3·3.
<b>T<sub>αβ0-dq0</sub></b>	: matriz de transformación de ejes $\alpha\beta 0$ a <i>dq0</i> , dimensión 3·3.
<b>T<sub>dq0-αβ0</sub></b>	: matriz de transformación de ejes <i>dq0</i> a $\alpha\beta 0$ , dimensión 3·3.
<b>T<sub>abc-dq0</sub></b>	: matriz de transformación de ejes <i>abc</i> a <i>dq0</i> , dimensión 3·3.
<b>T<sub>dq0-abc</sub></b>	: matriz de transformación de ejes <i>dq0</i> a <i>abc</i> , dimensión 3·3.
<b>H(s)</b>	: matriz de transferencia. <b>H(s)</b> = <b>C(sI - A)</b> <sup>-1</sup> <b>B</b> + <b>D</b> .
<b>Ĥ(s)</b>	: matriz de transferencia inversa. <b>Ĥ(s)</b> = <b>H</b> <sup>-1</sup> (s).
<b>H(s)<sup>H</sup></b>	: matriz conjugada transpuesta de <b>H(s)</b> . <b>H(s)<sup>H</sup></b> = ( <b>H(s)</b> ) <sup>*</sup> <sup>T</sup> .
<b>C</b>	: matriz de controlabilidad.
<b>O</b>	: matriz de observabilidad.
<b>L(s)</b>	: matriz de transferencia en L.D.
<b>Φ(t)</b>	: matriz de transición.
<b>Adj{P}</b>	: matriz adjunta de la matriz <b>P</b> .
<b>diag{x<sub>1</sub>,...}</b>	: matriz diagonal compuesta por los valores $x_1, x_2, \dots$
<b>ℜe{X}</b>	: matriz parte real de la matriz <b>X</b> .
<b>ℑm{X}</b>	: matriz parte imaginaria de la matriz <b>X</b> .
<b>X̄</b>	: matriz compuesta por elementos $\bar{x}_{i,j}$ que son fasores.

### Vectores

<b>x</b>	: vector de $n$ variables de estados, <b>x</b> = $[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$
<b>u</b>	: vector de $p$ variables de entrada, <b>u</b> = $[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T$
<b>y</b>	: vector de $q$ variables de salida, <b>y</b> = $[y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q]^T$
<b>p</b>	: vector de $m$ perturbaciones, <b>p</b> = $[p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m]^T$
<b>x̂</b>	: vector de $n$ variables de estados, <b>x̂</b> = $[\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \dots \ \hat{x}_n]^T$ (estimación de <b>x</b> ).
<b>ŷ</b>	: vector de $q$ variables de estados, <b>ŷ</b> = $[\hat{y}_1 \ \hat{y}_2 \ \dots \ \hat{y}_q]^T$ (estimación de <b>y</b> ).
<b>x̃</b>	: vector de $n$ variables de estados, <b>x̃</b> = $[\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \dots \ \tilde{x}_n]^T$ (error de estimación de <b>x̃</b> = <b>x</b> - <b>x̂</b> ).
<b>x<sup>abc</sup></b>	: vector de tres variables de estados, <b>x<sup>abc</sup></b> = $[x^a \ x^b \ x^c]^T$ (ejes estacionarios <i>abc</i> ).
<b>x<sup>αβ0</sup></b>	: vector de tres variables de estados, <b>x<sup>αβ0</sup></b> = $[x^\alpha \ x^\beta \ x^0]^T$ (ejes estacionarios $\alpha\beta 0$ ).

$\mathbf{x}^{dq0}$	: vector de tres variables de estados, $\mathbf{x}^{dq0} = [x^d \ x^q \ x^0]^T$ (ejes rotatorios $dq0$ ).
$\mathbf{x}_0$	: condición inicial del vector de estados, $\mathbf{x}_0 = [x_{10} \ x_{20} \ \dots \ x_{n0}]^T$
$\mathbf{x}_o$	: vector de estados en el punto de operación, $\mathbf{x}_o = [x_{1o} \ x_{2o} \ \dots \ x_{no}]^T$
$\mathbf{u}_o$	: vector de entradas en el punto de operación, $\mathbf{u}_o = [u_{1o} \ u_{2o} \ \dots \ u_{po}]^T$
$\mathbf{y}_o$	: vector de salidas en el punto de operación, $\mathbf{y}_o = [y_{1o} \ y_{2o} \ \dots \ y_{qo}]^T$
$\mathbf{y}_d$	: vector deseado (referencia) de $q$ variables de salida, $\mathbf{y}_d = [y_{1d} \ y_{2d} \ \dots \ y_{qd}]^T$
$\mathbf{p}_o$	: vector de perturbaciones en el punto de operación, $\mathbf{p}_o = [p_{1o} \ p_{2o} \ \dots \ p_{qo}]^T$
$\Delta \mathbf{x}$	: variación del vector de estados $\mathbf{x}$ en torno a $\mathbf{x}_o$ , $\Delta \mathbf{x} = [\Delta x_1 \ \Delta x_2 \ \dots \ \Delta x_n]^T$
$\Delta \mathbf{u}$	: variación del vector de entradas $\mathbf{u}$ en torno a $\mathbf{u}_o$ , $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u_1 \ \Delta u_2 \ \dots \ \Delta u_p]^T$
$\Delta \mathbf{y}$	: variación del vector de salidas $\mathbf{y}$ en torno a $\mathbf{y}_o$ , $\Delta \mathbf{y} = [\Delta y_1 \ \Delta y_2 \ \dots \ \Delta y_q]^T$
$\Delta \mathbf{p}$	: variación del vector de perturbaciones $\mathbf{p}$ en torno a $\mathbf{p}_o$ , $\Delta \mathbf{p} = [\Delta p_1 \ \Delta p_2 \ \dots \ \Delta p_m]^T$
$\mathbf{x}(s)$	: Laplace de $\mathbf{x}$ , $\mathbf{x}(s) = [x_1(s) \ x_2(s) \ \dots \ x_n(s)]^T$
$\mathbf{u}(s)$	: Laplace de $\mathbf{u}$ , $\mathbf{u}(s) = [u_1(s) \ u_2(s) \ \dots \ u_p(s)]^T$
$\mathbf{y}(s)$	: Laplace de $\mathbf{y}$ , $\mathbf{y}(s) = [y_1(s) \ y_2(s) \ \dots \ y_p(s)]^T$
$\mathbf{p}(s)$	: Laplace de $\mathbf{p}$ , $\mathbf{p}(s) = [p_1(s) \ p_2(s) \ \dots \ p_m(s)]^T$
$\mathbf{v}_k$	: $k$ -ésimo vector propio de $\mathbf{A}$ .
$\mathbf{w}_k$	: $k$ -ésimo vector propio de $\mathbf{A}^T$ .
$\mathbf{v}_k^*$	: conjugado del $k$ -ésimo vector propio de $\mathbf{A}$ .
$\mathbf{x}_{ec}$	: vector de estados para entrada cero.
$\mathbf{x}_{ci}$	: vector de estados para c.i. nulas.
$\mathbf{y}_{ec}$	: vector de salidas para entrada cero.
$\mathbf{y}_{ci}$	: vector de salidas para c.i. nulas.
$\mathbf{c}_k$	: $k$ -ésima fila de la matriz $\mathbf{C}$ .
$\mathbf{b}_k$	: $k$ -ésima columna de la matriz $\mathbf{B}$ .
$\nabla V(\mathbf{x})$	: gradiente de la función $V(\mathbf{x})$ . $\nabla V(\mathbf{x}) = \partial V(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$ .
$\vec{\mathbf{x}}$	: vector de fasores, $\vec{\mathbf{x}} = [\vec{x}_1 \ \vec{x}_2 \ \dots \ \vec{x}_n]^T$ .

## Escalares

$x_k$	: $k$ -ésima variable de estado.
$dx_k/dt = \dot{x}_k$	: derivada de la $k$ -ésima variable de estado.
$a_k$	: $k$ -ésimo coeficiente del polinomio característico de $\mathbf{A}$ .
$\lambda_k$	: $k$ -ésimo valor propio de $\mathbf{A}$ .
$\lambda_k^*$	: conjugado del $k$ -ésimo valor propio de $\mathbf{A}$ .
$\lambda_{ij}$	: ganancia relativa entre la entrada $i$ -ésima y la salida $j$ -ésima.
$l(s)$	: función de transferencia en L.D.
$d_{ij}$	: elemento $ij$ de la matriz $\mathbf{D}$ .
$h_{ij}(s)$	: elemento $ij$ de la matriz $\mathbf{H}(s)$ .
$\hat{h}_{ij}(s)$	: elemento $ij$ de la matriz $\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}^{-1}(s)$ .
$\text{rango}\{\mathbf{P}(s)\}$	: rango de la matriz $\mathbf{P}(s)$ .
$\det\{\mathbf{P}(s)\}$	: determinante de la matriz $\mathbf{P}(s)$ .
$\arg\{x\}$	: ángulo del número complejo $x$ .
$\text{tr}\{\mathbf{P}(s)\}$	: traza de la matriz $\mathbf{P}(s)$ .
$\max_{ij}\{w_{ij}\}_l$	: máximo elemento de la matriz $\mathbf{W}_l$ .
$\max\{\}$	: máximo valor.
$\min\{\}$	: mínimo valor.
$\log\{\}$	: logaritmo en base 10.
$u(t)$	: entrada escalón.

$r(t)$	: entrada rampa.
$\  e \ $	: norma del elemento $e$ .
$\sigma_l(\mathbf{A})$	: $l$ -ésimo valor singular de $\mathbf{A}$ .
$\bar{\sigma}(\mathbf{A})$	: máximo valor singular de $\mathbf{A}$ .
$\underline{\sigma}(\mathbf{A})$	: mínimo valor singular de $\mathbf{A}$ .
$\rho(\mathbf{A})$	: radio espectral de $\mathbf{A}$ .
$\gamma(\mathbf{A})$	: número de condición de $\mathbf{A}$ .
$V(\mathbf{x})$	: función de Lyapunov.
$\Omega$	: vecindad en el espacio de estados de $\mathbf{x}$ .
$\mathbf{G}$	: conjunto invariante.
$\mathbf{R}$	: conjunto invariante subconjunto de $\mathbf{G}$ .
$\mathbf{e}_{ss}$	: vector de error en estado estacionario.
$\delta$	: banda de asentamiento.
$t_s$	: tiempo de asentamiento.
$V$	: valor medio (RMS) de la señal continua (alterna) $v(t)$ .
$f(t)$	: función en el tiempo continuo.
$f(k)$	: función en el tiempo discreto (también escrita $f(kT)$ , con $T$ el tiempo de muestreo).
$f(s)$	: función en el plano de Laplace.
$f(\omega)$	: función en frecuencia continua de tiempo continuo.
$f(\Omega)$	: función en frecuencia continua de tiempo discreta.
$f(n)$	: función en frecuencia discreta de tiempo continuo.
$f(m)$	: función en frecuencia discreta de tiempo discreta.
$\bar{x}$	: fasor.



## Abreviaciones.

### Mayúsculas

L.A.	: lazo abierto.
L.C.	: lazo cerrado.
L.D.	: lazo directo.
L.I.T.	: lineal invariante en el tiempo.
S.P.I.	: semi-plano izquierdo.
S.P.D.	: semi-plano derecho.
F. de T.	: función de transferencia.
F.D.	: función descriptora.
M. de T.	: matriz de transferencia.
B.W.	: ancho de banda.
E.S.	: entrada/salida.
S.S.	: estado estacionario.
SISO	: sistema de una entrada y una salida (single input single output).
MIMO	: sistema de varias entradas y varias salidas (multiple inputs multiple outputs).
L.G.R.	: lugar geométrico de las raíces.
P.I.D.	: controlador proporcional integral derivativo.
S.P.	: sobrepaso.
M.G.	: margen de ganancia.
M.F.	: margen de fase.
FCD	: forma canónica diagonal.
FCC	: forma canónica controlable.
FCO	: forma canónica observable.
FCJ	: forma canónica de Jordan.
T.L.	: Transformada de Laplace.
T.F.	: Transformada de Fourier.
T.F.F.D.	: Transformada de Fourier de Frecuencia Discreta.
T.Z.	: Transformada $\mathcal{Z}$ .
T.F.T.D.	: Transformada de Fourier de Tiempo Discreta.
T.F.D.	: Transformada de Fourier Discreta.
D. de B.	: Diagrama de Bode



### Minúsculas

c.i.	: condiciones iniciales.
l.i.	: linealmente independiente.
l.d.	: linealmente dependiente.
c.c.	: corriente continua (en Inglés es d.c.).
c.a.	: corriente alterna (en Inglés es a.c.).
a.c.a.	: abscisa de convergencia absoluta.

# 1 Introducción a los Sistemas No-Lineales.

En este capítulo se presenta la necesidad de conocer herramientas de análisis y diseño de sistemas no-lineales. Se demuestra que la principal razón es la presencia de elementos y/o sub-sistemas con características no-lineales en la mayoría de las realidades físicas, los que en algunos casos son dominantes. Especial importancia se da a la terminología inherente a sistemas no-lineales producto de las características propias de estos sistemas. Entre estos se cuentan: múltiples puntos de equilibrio, ciclos límites y plano de fase. Finalmente, se indican los alcances del curso en el contexto más general de los sistemas de control.

## 1.1 Conceptos básicos.

### A. ¿Porqué estudiar sistemas no lineales?

**Mejorar sistemas de control existentes.** El diseño de controladores puede estar basado en una linealización del modelo en un punto de operación, este diseño óptimo puede deteriorarse al modificarse el punto de operación. Por ejemplo, al considerar un sistema en L.C. dado por la F. de T.

$k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$  (la cual es obtenida al linealizar en un punto de operación y definir un controlador

para esta condición de operación), podría tenerse una respuesta sin sobrepaso como ilustrado en la Fig. 1.1. Sin embargo, si  $\xi = \xi(t_o)$  (donde  $t_o$  es parte del punto de operación) podría darse el caso que la respuesta presente sobrepaso para algún  $t_o$ , y en el peor de los casos podría llegar a ser inestable. Un controlador que considere el sistema en forma íntegra puede mantener sus cualidades, independiente del punto de operación.

**Análisis de no-linealidades extremas.** La linealización siempre asume que los sistemas a modelar son linealizables. Sin embargo, algunos no toleran una representación apropiada distinta a la original. Por ejemplo, saturación, zonas muertas, histéresis, etc. Estos sub-sistemas pueden generar inestabilidades y ciclos límites en los sistemas en donde están insertos. Para tales casos se han desarrollado técnicas no-lineales.

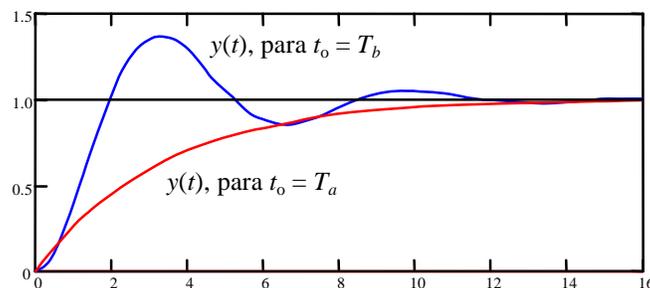


Fig. 1.1 Respuestas en función del punto de operación.

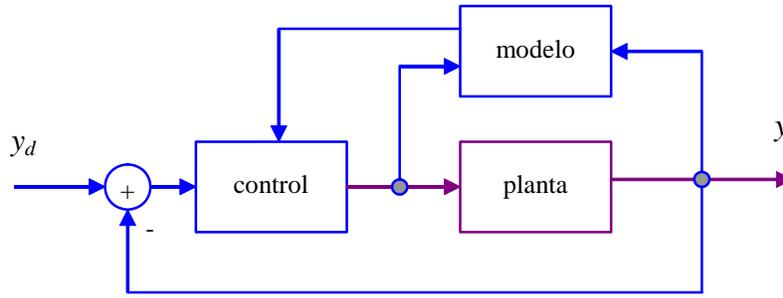


Fig. 1.2 Estructura básica de control adaptivo.

**Manejar incertidumbres en el modelo.** Normalmente se genera esta situación al existir parámetros que varían en el tiempo y afectan el sistema de forma desconocida. El sistema se puede degradar considerablemente y para esto existen dos técnicas no-lineales. Estas son: controladores robustos y controladores adaptivos. Los robustos son aquellos que básicamente se diseñan para las peores condiciones posibles a tomar por el sistema, y adaptivo es aquel que modifica su estructura y/o coeficientes de acuerdo a cada estimación de lo que sucede en la planta. La estructura general se muestra en la Fig. 1.2.

**Simplicidad de diseño.** Un controlador no-lineal puede transformar un problema no-lineal en uno lineal y por tanto permitir en un segundo paso la utilización de la teoría de control lineal. La selección del control no-lineal puede ser en algunos casos intuitiva. Por ejemplo, el modelo de un convertidor trifásico fuente de corriente como ilustrado en la Fig. 1.3 está dado por,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_s^d &= \omega i_s^q - \frac{1}{L_i} v_c^d + \frac{1}{L_i} v_s^d \\ \frac{d}{dt} i_s^q &= -\omega i_s^d - \frac{1}{L_i} v_c^q + \frac{1}{L_i} v_s^q \\ \frac{d}{dt} v_c^d &= \omega v_c^q + \frac{1}{C_i} i_s^d - \frac{1}{C_i} G_{ac} i_{dc} m_d \\ \frac{d}{dt} v_c^q &= -\omega v_c^d + \frac{1}{C_i} i_s^q - \frac{1}{C_i} G_{ac} i_{dc} m_q \\ \frac{d}{dt} i_{dc} &= \frac{1}{L_{dc}} G_{ac} (m_d v_c^d + m_q v_c^q) - \frac{R_{dc}}{L_{dc}} i_{dc} \end{aligned}$$

en donde, las variables estado son:  $i_s^d, i_s^q, v_c^d, v_c^q, i_{dc}$ ; las entradas son:  $m_d, m_q$ ; las perturbaciones son:

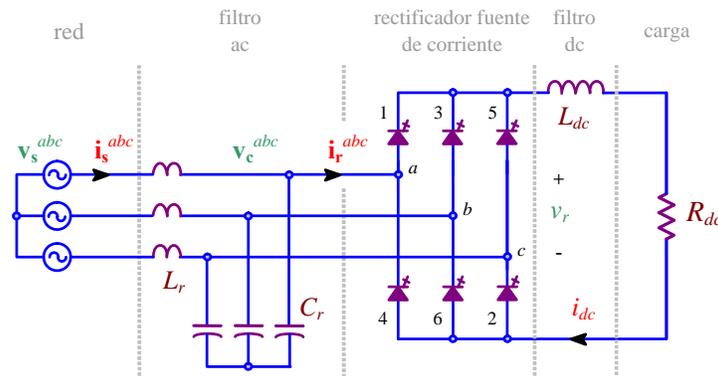


Fig. 1.3 Topología de un rectificador trifásico fuente de corriente.

$v_s^q, v_s^q$ ; y los parámetros son:  $\omega, L_i, C_i, L_{dc}, R_{dc}$ . La utilización de un controlador no-lineal lleva el sistema a una representación final en lazo cerrado del tipo  $\frac{i_s^d}{i_{sd}^d} = \frac{i_s^q}{i_{sd}^q} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ , en donde  $i_{sd}^d$  e  $i_{sd}^q$  son las referencias. El diseño final se reduce a la selección de  $\xi, \omega_n$  que inicialmente son arbitrarios.

### B. Representación y tipo de no-linealidades.

Los sistemas lineales pueden representarse en forma generalizada por las ecuaciones dinámicas,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned}$$

Similarmente, los sistemas no-lineales a estudiar en este curso pueden ser representados por,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned}$$

o en sus componentes,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ h_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}.$$

en donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estados (de  $n-1$ ),  $\mathbf{u}$  es el vector de entradas (de  $p-1$ ),  $\mathbf{y}$  es el vector de salidas (de  $q-1$ ),  $t$  es el tiempo,  $\mathbf{f}$  es un conjunto de  $n$  funciones escalares y  $\mathbf{h}$  es un conjunto de  $q$  funciones escalares.

Las no-linealidades pueden ser inherentes o intencionales. Las inherentes son propias del sistema, y las intencionales son adicionadas por diseño. Por ejemplo, histéresis (adicionada), torque en una máquina (inherente), convertidor dc/dc (inherente), etc. como ilustrado en la Fig. 1.4.

### C. Características de los sistemas lineales / no-lineales.

Los sistemas lineales tienen las siguientes características,

- i) Tienen un único punto de equilibrio si  $\mathbf{A}$  es no singular.
- ii) El punto de equilibrio es estable si todos los valores propios de  $\mathbf{A}$  tienen parte real negativa,

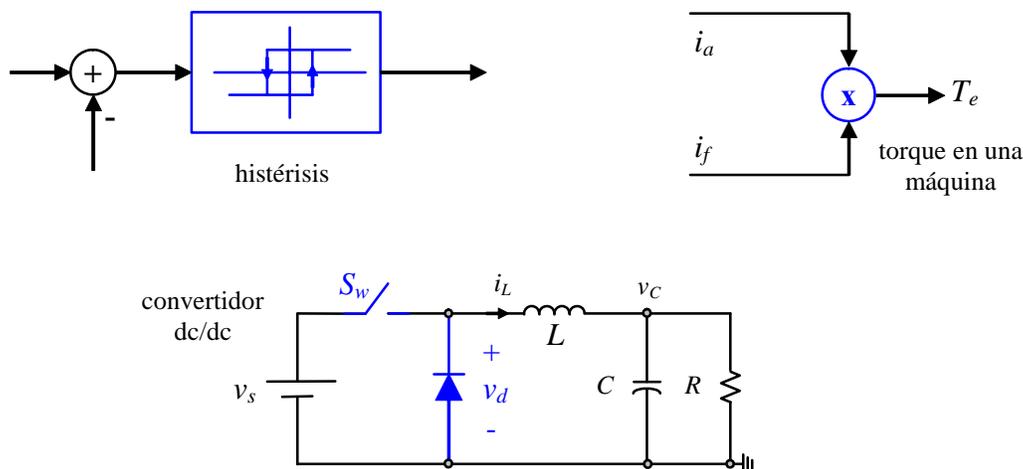


Fig. 1.4 Tipos de no-linealidades.

independiente de la c.i..

- iii) La solución general puede obtenerse analíticamente.
- iv) En presencia de una entrada  $\mathbf{u}(t)$  se cumple: (a) el principio de superposición, (b) la estabilidad asintótica implica que para entradas acotadas se tienen respuestas acotadas, y (c) una entrada sinusoidal genera una salida sinusoidal de la misma frecuencia.

En cambio, los sistemas no-lineales tienen las siguientes características,

- i) **Tiempo de escape finito.** Una variable de estado de un sistema no estable lineal se va a infinito a medida que el tiempo va a infinito; en cambio, un sistema no-lineal inestable puede hacerlo en un tiempo finito.
- ii) **Múltiples puntos de operación.** Un sistema no-lineal puede tener múltiples puntos de operación, los que pueden ser estables o inestables. Los estados del sistema convergen a uno u otro dependiendo del estado inicial.
- iii) **Ciclos límites.** Un sistema lineal invariante debe tener dos polos en el eje imaginario para oscilar permanentemente, lo que no se puede sostener en la realidad. Sistemas no-lineales pueden oscilar con amplitud y frecuencia constante independiente del punto inicial.
- iv) **Subarmónico, armónico u oscilaciones casi-periódicas.** Un sistema lineal bajo excitación sinusoidal, genera una salida sinusoidal de la misma frecuencia. Un sistema no-lineal ante excitación sinusoidal puede generar frecuencias que son submúltiplos o múltiplos de la frecuencia de entrada. También puede generar una oscilación casi-periódica (suma de componentes con frecuencias que no son múltiplos entre sí).
- v) **Caos.** Se produce en sistemas en que la salida es extremadamente sensible a las condiciones iniciales. La salida no está en equilibrio y no es oscilación periódica o casi periódica.
- vi) **Múltiples modos de comportamiento.** Más de un ciclo límite. Dependiendo de la entrada (amplitud y frecuencia) la salida puede exhibir armónicos, subarmónicos, etc.

## 1.2 Ejemplos Clásicos de Sistemas No-Lineales

La mayoría de los sistemas encontrados en la práctica son no-lineales. Aquí se revisan algunos, cuyos modelos son válidos para otros sistemas no-lineales.

### A . El péndulo.

El modelo está dado por  $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta - kl^2\dot{\theta} + T$ , Fig. 1.5(a). Si se define  $x_1 = \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$ , entonces las ecuaciones de estado son:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(g/l) \sin x_1 - (k/m)x_2 + u/(ml^2)\end{aligned}$$

Por lo que los puntos de equilibrio son,  $x_{20} = 0$ ,  $x_{10} = n\pi$ , ( $n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ ) para  $u = 0$ . Se sabe que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$  es estable y que el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = (0, \pi)$  es inestable. ¿Cómo se puede derivar esto de la ecuación del péndulo ?. Se destaca que esta ecuación es también válida para un generador conectado a un bus infinito y para un PLL.

### B . Péndulo invertido .

En este caso el modelo, Fig. 1.5(b), está dado por la ecuación  $ml^2\ddot{\theta} + ml \cos(\theta)\ddot{x} - mgl \sin \theta = 0$  y por la ecuación  $ml \cos(\theta)\ddot{\theta} + (M + m)\ddot{x} - ml \sin \theta = F(t)$ . No se considera la presencia de roce y además de

una varilla de masa despreciable frente a la masa al extremo de ésta y a la del carro. Las ecuaciones se derivan fácilmente utilizando el Principio de Mínima Acción (Lagrange). Al definir  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \theta$ ,  $x_3 = \dot{x}$  y  $x_4 = \dot{\theta}$ , las ecuaciones de estado - después de algunas operaciones algebraicas- son:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = [u + mlx_4^2 \sin(x_2) - mg \sin(x_2) \cos(x_2)] / [M + m(1 - \cos(x_1))^2]$$

$$\dot{x}_4 = [-u \cos(x_2) - mlx_4^2 \sin(x_2) \cos(x_2) + (M + m)g \sin(x_2)] / [Ml + ml(1 - \cos(x_1))^2]$$

Claramente es un sistema no-lineal. Al no considerarse roce el sistema nunca se detiene ante una c.i. distinta de cero.

### C. Estanque de área variable.

Un caso interesante es el estanque con área dependiente de la altura, Fig. 1.6(a) que es utilizado para diluir agua  $f_m$  de alta concentración de sal  $c_m$  con agua  $f_a$ . Para lo cual se puede manipular el flujo de agua  $f_a$ . En este caso el modelo está dado por  $\dot{V} = f_m + f_a - f_s = \dot{h}dV/dh = f_m + f_a - k_v\sqrt{gh}$  y por  $d(Vc_s)/dt = f_m c_m - f_s c_s = \dot{V}c_s + V\dot{c}_s$ . Al definir  $x_1 = h$  y  $x_2 = c_s$ , y la entrada  $u = f_a$ , entonces las ecuaciones de estado son:

$$\dot{x}_1 = (f_m + u - k_v\sqrt{gh}) / (h^2 / a^2)$$

$$\dot{x}_2 = (f_m c_m - f_m c_s - f_a c_s) / (h^3 / (3a^2))$$

En este caso los puntos de equilibrio están dados por las ecuaciones  $f_m + u_0 - k_v\sqrt{gh_0} = 0$  y por  $f_m c_m - f_m c_{s0} - u_0 c_{s0} = 0$ .

### D. Reactor continuo exotérmico.

El sistema mostrado en Fig. 1.6(b) es un reactor continuamente agitado donde se realiza una reacción exotérmica irreversible,  $A \rightarrow B$ . Es de interés la temperatura interna,  $T$ , y la concentración de la componente A,  $C_A$ , para lo cual se puede manipular la temperatura del refrigerante,  $T_c$ . El modelo de este sistema considerando a las variables de estado  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [C_A \ T]^T$ , la entrada  $\mathbf{u} = u = T_c$  y la salida  $\mathbf{y} = y = T$ , es,

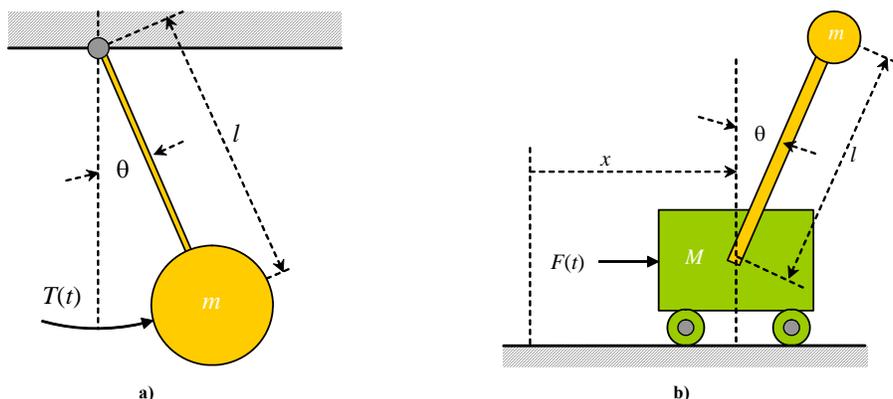


Fig. 1.5 Ejemplos de sistemas no-lineales. (a) péndulo con fricción, (b) péndulo invertido.

$$\dot{C}_A = \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 e^{\left(\frac{-E}{RT}\right)} C_A$$

$$\dot{T} = \frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 e^{\left(\frac{-E}{RT}\right)} C_A + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T)$$

Claramente, el sistema es no lineal; es más, la variable de estado que es la temperatura aparece como argumento de la función exponencial.

### E . Compensador de Potencia Reactiva.

El sistema eléctrico trifásico balanceado que se muestra en la Fig. 1.7 representa un sistema generador representado por una fuente trifásica balanceada  $\mathbf{v}_s^{abc}$ , la línea de transmisión representada por un  $R_l L_l$  en serie, un consumo representado por una carga  $R_o L_o$  y un compensador paralelo que toma una corriente  $\mathbf{i}_i^{abc}$ . Este último es incluido por el dueño del consumo para suministrar los reactivos absorbidos por la carga y así obtener un factor de potencia ( $fp_{PCC}$ ) unitario en el PCC (punto de común acoplamiento) y no pagar multa. Se sabe que el compensador requiere que la tensión en su barra dc,  $v_{dc}$ , sea constante y mayor al máximo valor de tensión entre líneas medido en el PCC. Además, se puede modelar su lado ac como una fuente trifásica de tensiones monofásicas dadas por  $\mathbf{v}_i^{abc} = \mathbf{m}^{abc} v_{dc}$ , donde  $\mathbf{m}^{abc}$  son tres señales moduladoras que suman cero (sinusoidales) y tienen máximos instantáneos entre 0.5 y -0.5, finalmente, el modelo del lado dc es  $i_{dc} = \mathbf{i}_i^{abcT} \mathbf{m}^{abc}$ . El modelo de este sistema en ejes rotatorios  $dq0$  considerando a las variables de estado  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T = [i_o^d \ i_o^q \ i_s^d \ i_s^q \ v_{dc}]^T$ , la entrada  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^T = [m^d \ m^q]^T$  y la salida  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T = [v_{dc} \ fp_{PCC}]^T$ , es,

$$\frac{di_o^d}{dt} = \omega i_o^q + \{-(L_i + L_l)R_o i_o^d - L_l R_l i_s^d + L_l m_d v_{dc} + L_i v_s^d\} / L^2,$$

$$\frac{di_o^q}{dt} = -\omega i_o^d + \{-(L_i + L_l)R_o i_o^q - L_l R_l i_s^q + L_l m_q v_{dc} + L_i v_s^q\} / L^2,$$

$$\frac{di_s^d}{dt} = \omega i_s^q + \{-L_l R_o i_s^d - (L_o + L_l)R_l i_s^d + L_o m_d v_{dc} + (L_o + L_l)v_s^d\} / L^2,$$

$$\frac{di_s^q}{dt} = -\omega i_s^d + \{-L_l R_o i_s^q - (L_o + L_l)R_l i_s^q + L_o m_q v_{dc} + (L_o + L_l)v_s^q\} / L^2,$$

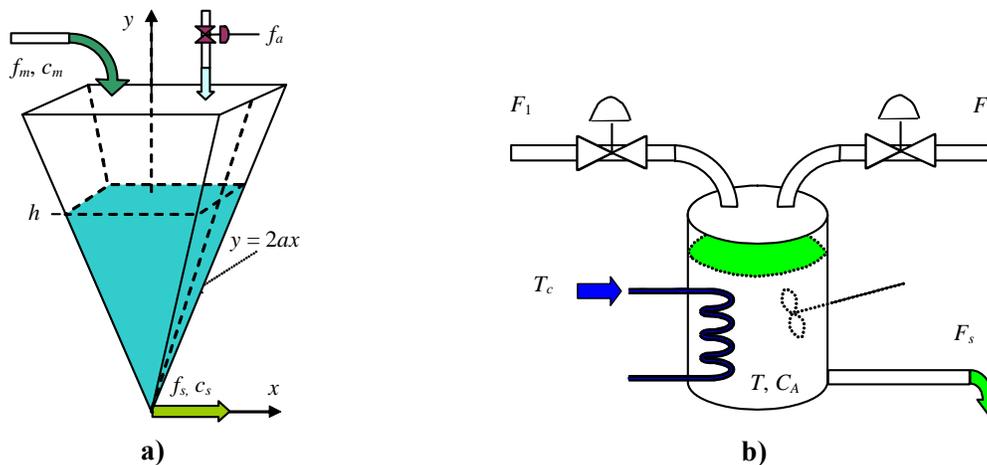


Fig. 1.6 Ejemplos de sistemas no-lineales. (a) estanque de área variable para diluir, (b) reactor continuo exotérmico.

$$\frac{dv_{dc}}{dt} = \{-m_d i_o^d - m_q i_o^q + m_d i_s^d + m_q i_s^q - v_{dc} / R_{dc}\} / C_{dc},$$

Claramente, el sistema es no lineal puesto que las entradas están multiplicando a las variables de estado. Si adicionalmente se considera que la segunda salida es el  $fp_{PCC}$  y que está dada por

$$fp_{PCC} = \cos\{\tan^{-1}(v_o^q / v_o^d) - \tan^{-1}(i_s^q / i_s^d)\},$$

entonces se tiene que la función  $y = h(x, u)$  es también no lineal.

### 1.3 Restricciones a los Sistemas a Estudiar

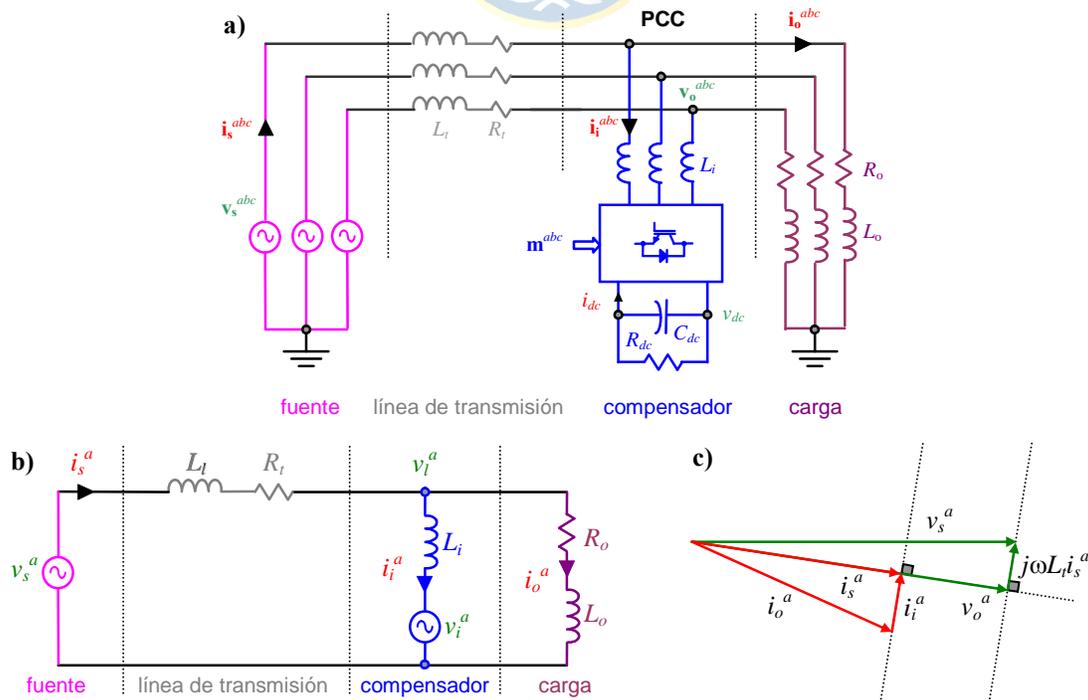
En general, un sistema no-lineal puede ser representado por una ecuación de estados como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= h(x, u, t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Un sistema físico representado por (1.1). Debe tener las siguientes propiedades para cada entrada  $u(t)$ .

- i) Existencia: tener a lo menos una solución (continuidad de  $f$ ).
- ii) Unicidad: tener sólo una solución (condición de Lipschitz).
- iii) Tener exactamente una solución definida en el rango  $[0, \infty)$ .
- iv) Tener exactamente una solución definida en  $[0, \infty)$ , y que esta solución dependa continuamente en el estado inicial  $x(0)$ .

**Ejemplo 1.1.** Estudie si los siguientes sistemas no cumplen con alguna de las propiedades anteriores por lo que no serían considerados casos de estudio. **R.:** (a)  $\dot{x} = -\text{sgn}(x)$ , donde  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ . No existe una función  $x$  que satisfaga la



**Fig. 1.7** Compensador de potencia reactiva. (a) circuito eléctrico, (b) modelo por fase en ejes  $abc$ , (c) diagrama fasorial para factor de potencia unitario en el PCC, con  $R_l = 0$ .

expresión anterior. Por lo tanto la propiedad (i) no se cumple. (b)  $\dot{x} = 3x^{2/3}$ , con  $x_0 = 0$ . En este caso  $x(t) = t^3$  y  $x(t) = 0$  satisfacen la ecuación, por lo tanto hay dos soluciones con lo que (ii) no se cumple. (c)  $\dot{x}e^x = 1$ , con  $x_0 = 0$ . La solución es  $x(t) = -\ln(1 - t)$  por lo que no hay solución en  $t \in (1, \infty)$  por lo que (iii) no se cumple. ♣

## 1.4 Definiciones y Propiedades Preliminares

Si se considera el sistema,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

en donde se ha supuesto que no interesa definir la salida y que la entrada es función de los estados, se pueden definir los siguientes términos.

**Def.:** Se define un *sistema autónomo* si la expresión (1.2) es independiente del tiempo. Es decir, el sistema queda descrito por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

**Def.:** Se define *punto de equilibrio* al vector  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  en el instante  $t_0$  si éste satisface:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.3)$$

En sistemas autónomos el punto de equilibrio es independiente del tiempo. También se conoce como *punto estacionario* o *punto singular*.

**Def.:** Se define *punto de equilibrio aislado* al vector  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  en el instante  $t_0$  si existe una vecindad  $\Omega$  entorno a  $\mathbf{x}_0$  de manera que  $\Omega$  no contiene otros puntos de equilibrio.

Para determinar en forma práctica si un punto de equilibrio es aislado se tiene el siguiente teorema.

**Teorema:** Considerar el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  y suponer que  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio al instante  $t_0$ , además que  $\mathbf{f}$  es continuamente diferenciable y se define  $\mathbf{A}(t_0)$  como la matriz dada por  $\mathbf{A}(t_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t_0)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ . Si  $\mathbf{A}(t_0)$  es no-singular, entonces  $\mathbf{x}_0$  es un punto de equilibrio aislado al instante  $t_0$ .

**Ejemplo 1.2.** Estudie el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$  del sistema dado por  $\dot{x}_1 = a_1x_1 + b_1x_1x_2$  y

$\dot{x}_2 = a_2x_2 + b_2x_1x_2$ . **R.:** Al determinar  $\mathbf{A}(t_0) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, t_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, t_0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, t_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, t_0)}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$  se encuentra que  $\mathbf{A}(t_0) = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$

cuyo determinante es  $\det\{\mathbf{A}\} = a_1a_2$  que es distinto de cero si  $a_1$  y  $a_2$  son distintos de cero. Es decir, el punto  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$  es un punto de equilibrio aislado si  $a_1$  y  $a_2$  son distintos de cero. ♣

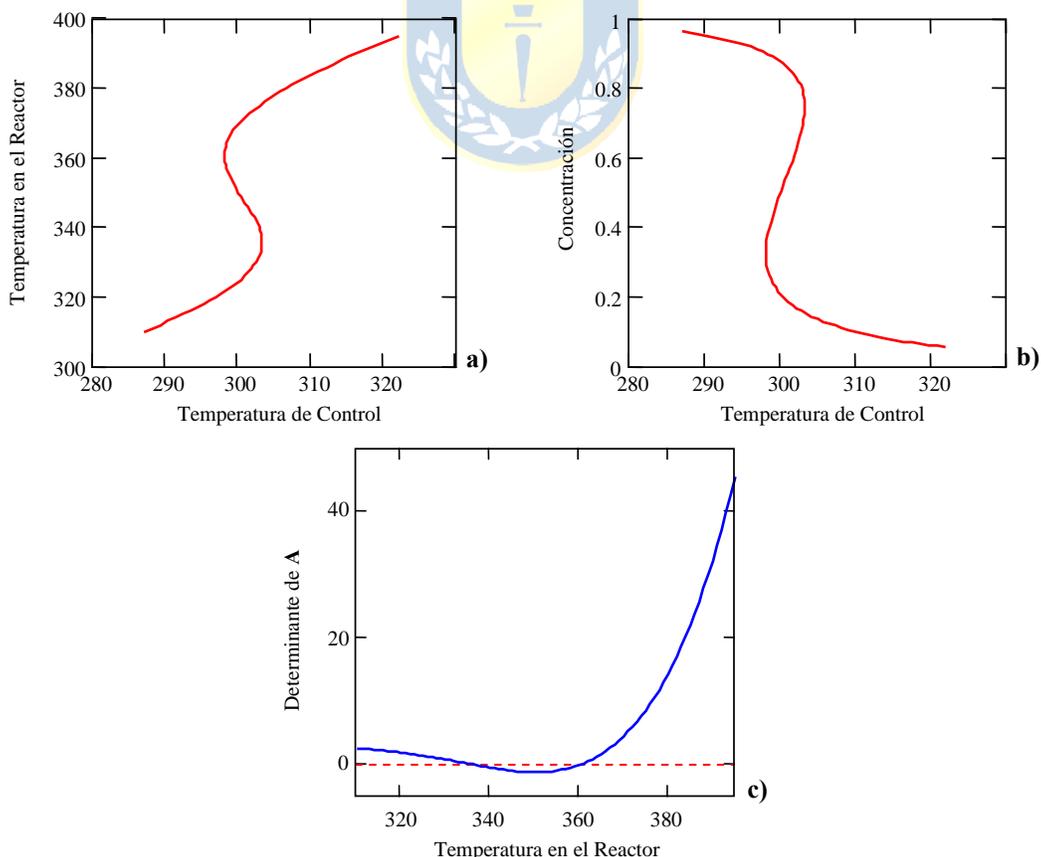
**Ejemplo 1.3.** Determine y caracterice los puntos de equilibrio del reactor exotérmico. **R.:** El modelo puede ser escrito como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q}{V}(C_{Af} - x_1) - k_0 e^{\left(\frac{E}{Rx_2}\right)} x_1 \\ \frac{q}{V}(T_f - x_2) + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 e^{\left(\frac{E}{Rx_2}\right)} x_1 + \frac{UA}{V\rho C_p}(u - x_2) \end{bmatrix}, \quad y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_2,$$

por lo tanto, los puntos de operación están dado por los valores de  $C_A = x_1$ ,  $T = x_2$  y  $T_c = u$  tal que satisfacen,  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , la

Fig. 1. 8 muestra la gráfica de los puntos de operación, esta se obtiene solucionando la ecuación anterior para valores dados de la temperatura de control  $T_c$ . Los valores de las cantidades involucradas están dadas en la tabla siguiente. La Fig. 1. 8 muestra que para ciertos valores de la entrada hay tres valores posibles de las variables de estado que son solución. Es decir, hay múltiples puntos de operación. Por otro lado, la gráfica de  $|A|$  ilustrada en la Fig. 1. 8(c), donde  $A$  está dada por,

Variable	Valor	Variable	Valor
$q$	100 L/min	$C_p$	0.239 J/g K
$C_{Af}$	1 mol/L	$(-\Delta H)$	$5 \times 10^4$ J/mol
$T_f$	350 K	$E/R$	8750 K
$V$	100 L	$k_0$	$7.2 \times 10^{10} \text{ min}^{-1}$
$\rho$	1000 g/L	UA	$5 \times 10^4$ J/min K



**Fig. 1. 8** Puntos de operación del reactor del Ejemplo 1.3; **a)**  $T$  vs  $T_c$ , **b)**  $C_A$  vs  $T_c$ , **c)**  $|A|$  vs  $T$ .

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{-q}{V} - k_0 e^{\left(\frac{E}{R x_2}\right)} & -k_0 \frac{E}{R x_2^2} e^{\left(\frac{E}{R x_2}\right)} x_1 \\ \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 e^{\left(\frac{E}{R x_2}\right)} & \frac{-q}{V} + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 \frac{E}{R x_2^2} e^{\left(\frac{E}{R x_2}\right)} x_1 - \frac{UA}{V \rho C_p} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}}$$

muestra que hay puntos de operación que no son aislados. Estos ocurren para  $dT/dT_c = 0$ . ♣

Entre las propiedades de las soluciones se tiene,

- i) Una solución  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \geq 0$ , es acotada si  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq M$ ,  $t \geq 0$ .
- ii) Una solución  $\mathbf{x}(t)$  es periódica u oscilatoria si existe un número real  $T > 0$  de manera que  $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ . El menor  $T$  se conoce como período. Una solución es *periódica* si y sólo si la trayectoria en el espacio de estados es una curva cerrada.
- iii) Una solución  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \geq 0$  es una solución *periódica aislada* si para algún  $\delta > 0$ , no existe otra solución periódica con un estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  que satisfaga  $\min\{\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(t)\|\} < \delta$  para  $t \geq 0$ .
- iv) Una de las más importantes soluciones periódicas es el *ciclo límite*.
- v) Una solución periódica es un ciclo límite si  $\mathbf{x}(t)$  es una solución aislada.
- vi) Propiedades asintóticas de soluciones periódicas revelan su estabilidad, dada una solución periódica  $\mathbf{x}_p(t)$ ,  $t \geq 0$ , si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , de manera que  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_p(0)\| < \delta$  garantiza que  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t)\| < \varepsilon$  y que  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces la solución periódica  $\mathbf{x}_p(t)$ ,  $t \geq 0$  es estable asintóticamente en el sentido de Lyapunov.
- vii) En el caso de ciclos límites se aplica el concepto de estabilidad orbital. Si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  de manera que  $\min\{\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_p(t)\|\} < \delta$  para  $t \geq 0$  implica que  $\min\{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(\tau)\|\} < \varepsilon$  para  $t, \tau \geq 0$ , y que  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(\tau)\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , para  $\tau \geq 0$  entonces la solución periódica  $\mathbf{x}_p(t)$  es orbitalmente estable.

## 1.5 Análisis en el Plano de Fase

Hay dos razones principales por las cuales es útil al análisis en el plano de fase. Esas son: (a) Método Gráfico: útil para sistemas de segundo orden y (b) No-linealidades extremas: permite analizar saturaciones, controles on-off, etc.

### A. Conceptos.

En general, un sistema de segundo orden puede ser representado por las ecuaciones de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

Si se grafica  $x_1(t)$  vs  $x_2(t)$ , con  $t$  como parámetro, la gráfica resultante se llama *gráfico del plano de estados* o *trayectoria del plano de estados*. El plano bi-dimensional se llama *plano de estados*. En el caso especial cuando la primera ecuación es  $\dot{x}_1 = x_2$ , el plano de estados se llama *plano de fase* y el gráfico se llama *gráfico* o *trayectoria del plano de fase*.

**Ejemplo 1.4.** Determine el plano de fase del sistema dado por  $\ddot{x} + x = 0$ . **R.:** La solución es  $x(t) = x_0 \cos(t)$  por lo que  $\dot{x}(t) = -x_0 \sin(t)$ . Si se define  $x_1 = x$  y  $x_2 = dx/dt$ , entonces,  $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$  por lo que el plano de fase está dado en la Fig. 1.10(a). ♣

**Def.:** Un *punto singular* es un punto de equilibrio en el plano de fase. Son conocidos como punto singular dado que  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  por lo que  $f_1 = f_2 = 0$  y por lo tanto al tomar el cociente  $f_2/f_1$  se hace singular.

**Ejemplo 1.5.** Dibuje el plano de fase del sistema dado por  $\ddot{x} + 0.6\dot{x} + 3x + x^2 = 0$ . **R.:** Los puntos de equilibrio están dados por  $3x + x^2 = x(3 + x) = 0$  por lo que se tiene a  $x_0 = 0$  y  $x_0 = -3$  como puntos de equilibrio. Si se define  $x_1 = x$  y  $x_2 = dx/dt$ , entonces, los puntos de equilibrio son  $(0, 0)$  y  $(-3, 0)$ . El plano de fase se encuentra en la Fig. 1.10(b). ♣

La representación del sistema en un plano de fase también se puede aplicar a sistemas de primer orden de la forma  $\dot{x} + f(x) = 0$ , la idea es dibujar  $\dot{x}$  con respecto de  $x$ . La diferencia es que en este caso sólo hay una única trayectoria.

**Ejemplo 1.6.** Dibuje el plano de fase equivalente de la ecuación diferencial no-lineal  $\dot{x} + 4x - x^3 = 0$ . **R.:** La ecuación se puede escribir como  $\dot{x} = -4x + x^3$  por lo que los puntos de equilibrio están dados por  $\dot{x} = -4x + x^3 = x(-4 + x^2) = 0$ . Es decir,  $x_0 = 0, 2, -2$ . Esto se puede representar en el plano  $\dot{x}$  vs  $x$  como ilustrado en la Fig. 1.10(c). ♣

## B. Construcción del Plano de Fase

Hay varias alternativas para la construcción del plano de fase. Entre las cuales se cuenta: (a) analítica, (b) isoclinas, (c) delta, (d) Lienard. En este curso se revisarán las dos primeros.

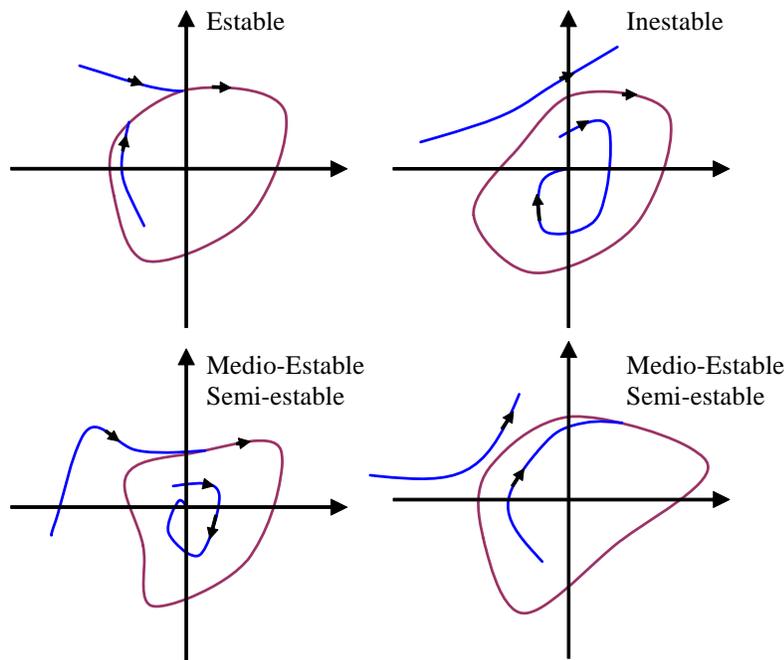


Fig. 1.9 Ejemplos de ciclos límites.

**Método Analítico.** En este caso se puede recurrir a obtener las expresiones para  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , y luego eliminar  $t$  combinando  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  como ilustrado en el Ejemplo 1.4. La otra opción es considerar que  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}$ , de donde se puede obtener la expresión final. En el caso del Ejemplo 1.4 se

tiene que  $\dot{x}_1 = x_2$  y  $\dot{x}_2 = -x_1$ , por lo que  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2}$ . Finalmente,  $x_2 dx_2 = -x_1 dx_1$ , de donde,

$$\frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2} x_1^2 = c, \text{ por lo que la solución final es } x_2^2 + x_1^2 = 2c = x_0^2.$$

**Ejemplo 1.7.** Dibuje el plano de fase del sistema ilustrado en la Fig. 1.11(a). **R.:** En este se puede apreciar que (a) si  $\theta > 0$ , entonces la ecuación resultante es  $\ddot{\theta} = -u$ , al definir  $x_1 = \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$  se tiene que  $\dot{x}_1 = x_2$  y  $\dot{x}_2 = -u$ , por lo que  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-u}{x_2}$ ,  $x_2 dx_2 = -u dx_1$ ,  $\frac{1}{2} x_2^2 + u x_1 = \frac{c}{2}$ , por lo que la solución final es  $x_2^2 + 2u x_1 = c$ . Similarmente se encuentra para  $\theta < 0$  que la solución es  $x_2^2 - 2u x_1 = c$ . El plano de fase se encuentra en la Fig. 1.11(b). ♣

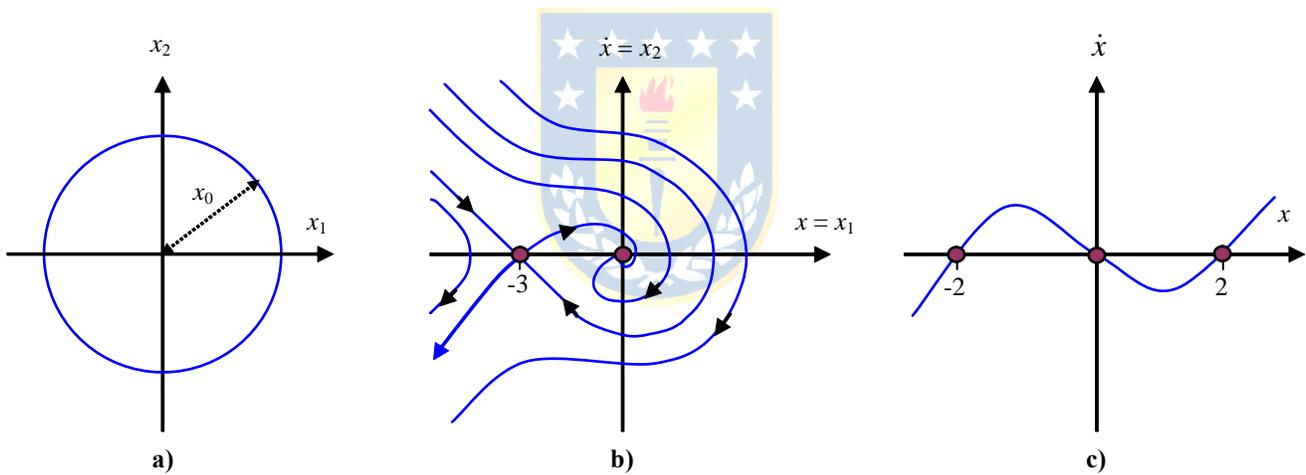


Fig. 1.10 Planos de fase. (a) Ejemplo 1.4, (b) Ejemplo 1.5, (c) Ejemplo 1.6.

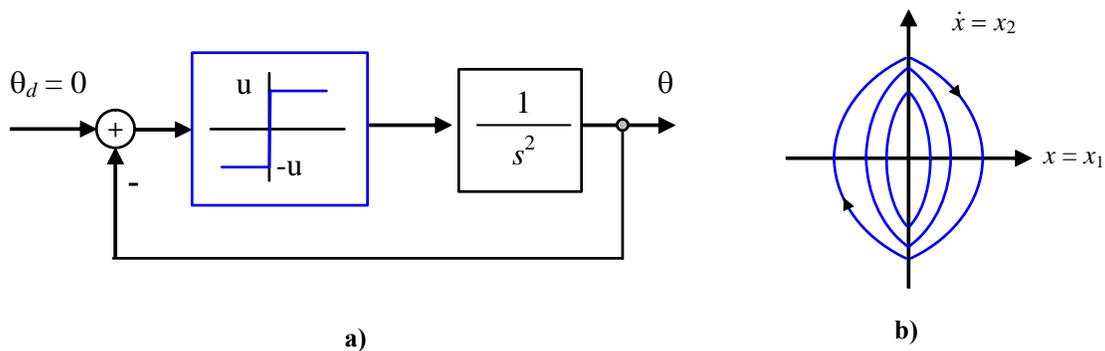


Fig. 1.11 Diagrama y plano de fase del Ejemplo 1.7. (a) Diagrama en bloques. (b) Plano de Fase.

**Método de las Isoclinas.** Una isoclina es definida como un lugar de puntos que tienen igual pendiente. Un lugar de isoclinas es definido como:  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = \alpha$ . Por lo tanto, todos los puntos del plano de estados que cumplen con  $f_2(x_1, x_2) = \alpha f_1(x_1, x_2)$  tienen la misma pendiente. Este resultado indica que dado un  $\alpha$ , se puede encontrar los pares que satisfacen tal condición y así graficar el plano de estados.

**Ejemplo 1.8.** Sea el sistema dado por  $\ddot{x} + x = 0$ . Si se define  $x_1 = x$  y  $x_2 = dx/dt$ , entonces,  $\dot{x}_1 = x_2$  y  $\dot{x}_2 = -x_1$ , por lo que  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2} = \alpha$ . Es decir las regiones con igual pendiente están dadas por  $x_1 + \alpha x_2 = 0$ . El plano de fase está ilustrado en la Fig. 1.12. ♣

### C. Análisis en el Plano de Fase de Sistemas Lineales.

Los planos de fase de sistemas lineales son de interés por cuanto la información obtenida a partir de éstos es extendible a sistemas no-lineales. Sea el sistema de segundo orden,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned}$$

con las c.i.  $x_1(0) = x_{10}$  y  $x_2(0) = x_{20}$ , por lo tanto, el polinomio característico  $\det\{s\mathbf{I} - \mathbf{A}\} = 0$  queda dado por  $s^2 - (a_{11} + a_{22})s + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ . Por lo tanto, los valores propios están dados por,

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{-2}$$

Se pueden distinguir dos casos en el análisis de los valores propios, los cuales a su vez se pueden subclasificar. Los planos de estado resultantes se ilustran en la Fig. 1.13.

- I. Si  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ , entonces el  $(0, 0)$  es el único punto de equilibrio.
  - a) Si  $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \geq 0 \Rightarrow \lambda_1$  y  $\lambda_2$  reales.
    - i) Si  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \rightarrow (0, 0)$  es un nodo estable.
    - ii) Si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 \rightarrow (0, 0)$  es un nodo inestable.
    - iii) Si  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \rightarrow (0, 0)$  es un nodo punto de silla.
  - b) Si  $(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) < 0 \Rightarrow \lambda_1$  y  $\lambda_2$  complejos.

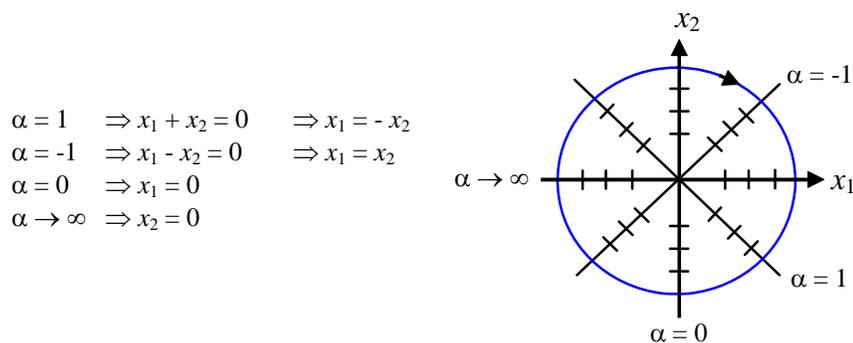


Fig. 1.12 Plano de fase del Ejemplo 1.8.

- iv) Si  $\Re\{\lambda_1\} = \Re\{\lambda_2\} = 0 \rightarrow (0, 0)$  es un punto central.
- v) Si  $\Re\{\lambda_1\} = \Re\{\lambda_2\} < 0 \rightarrow (0, 0)$  es un foco estable.
- vi) Si  $\Re\{\lambda_1\} = \Re\{\lambda_2\} > 0 \rightarrow (0, 0)$  es un foco inestable.

II. Si  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ , entonces hay infinitos puntos de equilibrio.

- vii) Si  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0 \rightarrow (0, 0)$  es estable.
- viii) Si  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 \rightarrow (0, 0)$  es inestable.
- ix) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, a_{12}a_{21} \neq 0 \rightarrow (0, 0)$  es inestable.
- x) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, a_{ij} = 0, \forall i, j \rightarrow (0, 0)$  es inestable.

### D. Análisis en el Plano de Fase de Sistemas No-Lineales

Si las funciones  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$  son continuamente diferenciables en torno a un punto de equilibrio, el comportamiento en torno a este punto esta íntimamente ligado con el comportamiento del sistema linealizado alrededor de este punto de operación.

**Comportamiento local de sistemas no-lineales.** Se fundamenta en la linealización del sistema en torno al punto de equilibrio para luego utilizar las conclusiones derivadas de sistemas lineales para caracterizarlo. Así, si  $\mathbf{x}_0$  un punto de equilibrio,  $f_1$  y  $f_2$  funciones continuamente diferenciales en la vecindad de  $(x_{10}, x_{20})$ , entonces el vector de estados se puede definir como  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ , por lo que una

linealización del sistema es,  $\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}$ , donde,  $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ .

**Ejemplo 1.9.** Clasifique los puntos de equilibrio del sistema dado por  $\dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2$  y  $\dot{x}_2 = x_2 - x_1x_2$ . **R.:**

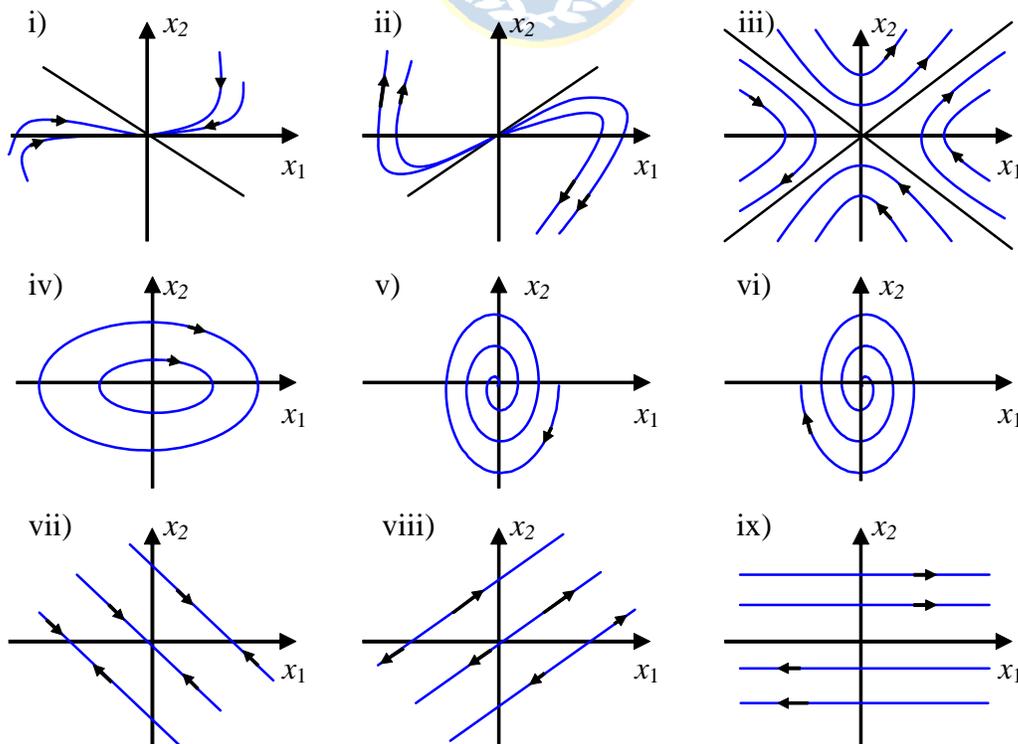


Fig. 1.13 Plano de fase de un sistema lineal de segundo orden.

Claramente, los puntos de equilibrio son  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$ . Al linealizar en torno a  $(0, 0)$  se obtiene que  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , por lo que los valores propios son  $1$  y  $-1$ . Por lo tanto el punto  $(0, 0)$  en el sistema lineal es un punto de silla y por ende el  $(0, 0)$  es un punto de silla en el sistema no-lineal. Por otro lado, al linealizar en torno a  $(1, 1)$  se obtiene que  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , por lo que los valores propios son  $\pm j$ . Por lo tanto el punto  $(0, 0)$  en el sistema lineal es un punto central y por ende el  $(1, 1)$  debería ser un punto central en el sistema no-lineal. Desafortunadamente, la posición de los valores propios en el eje imaginario se ve afectada por los términos no considerados al linealizar. Por lo tanto, nada se puede concluir del sistema no-lineal en este caso. ♣

**Ciclos Límites.** Otro importante caso es el de los ciclos límites. Sea el caso  $\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)$  y  $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ . Al considerar  $x_1 = r\cos\theta$  y  $x_2 = r\sin\theta$ . Se obtiene  $\dot{r} = -r(r^2 - 1)$  y  $\dot{\theta} = -1$ . Claramente el cambio de coordenadas muestra que si  $r < 1$  entonces  $dr/dt > 1$  por lo que el radio crece y si  $r > 1$  entonces  $dr/dt < 0$  por lo que el radio decrece. Por lo tanto, en  $r = 1$  hay un ciclo límite como ilustrado en la Fig. 1.14. Los ciclos límites pueden ser estables, inestables y semiestables, Fig. 1.9. Los ciclos límites difieren de soluciones periódicas en que los primeros atraen a todas las órbitas a su ciclo, los últimos orbitan en torno a estos. Nótese que si el ciclo límite es estable entonces la amplitud es fija.

## E . Existencia de Ciclos Límites

Hay tres teoremas que facilitan la predicción de ciclos límites.

**Teorema:** Poincare. Si un ciclo límite existe en el sistema autónomo de segundo orden  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ , entonces  $N = S + 1$ , donde  $N$ : es el número de nodos, focos y puntos centrales y  $S$  es el número de puntos de silla. Ambos encerrados por el ciclo límite.

**Teorema:** Poincare–Bendixon. Si una trayectoria del sistema autónomo de segundo orden  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$  permanece en una región finita  $\Omega$ , entonces una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- La trayectoria viaja hasta un punto de equilibrio.
- La trayectoria tiende a un ciclo límite asintóticamente estable.
- La trayectoria es un ciclo límite.

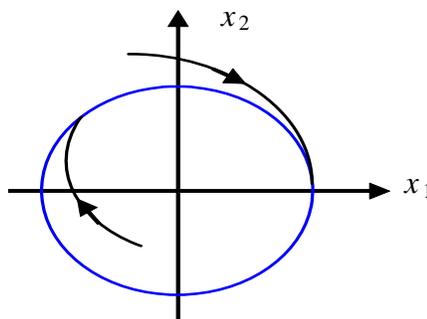


Fig. 1.14 Plano de fase de un ciclo límite.

**Teorema:** Bendixon. Si en el sistema autónomo de segundo orden  $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$  no existe un ciclo límite en una región  $\Omega$  del plano de fase en que  $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2$  no es idénticamente igual a cero y no cambia de signo. Formulación Rígida: Si  $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2$  no es igual a cero y no cambia de signo en  $\Omega$ , entonces  $\Omega$  no contiene trayectorias cerradas.

**Ejemplo 1.10.** Sea el sistema dado por  $\dot{x}_1 = g(x_2) + 4x_1x_2^2$  y  $\dot{x}_2 = h(x_1) + 4x_1^2x_2$ . Evalúe la existencia de ciclos límites.

**R.:** Al evaluar  $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2$  se tiene  $4x_2^2 + 4x_1^2 = 4(x_1^2 + x_2^2)$  que claramente no cambia de signo por lo que no existen ciclos límites en todo el plano de fase. ♣

Los ciclos límites aparecen también en sistemas en donde podría no haber sospecha de su existencia. Por ejemplo, el reactor exotérmico con una temperatura de control  $T_c$  de  $T_c = 311$  está en un punto de operación dado por  $T = 385$  y  $C_A = 0.093$ . Este punto es estable como se ilustra en la Fig. 1.15. Al aumentar la temperatura de control en  $5^\circ$  (de  $T_c = 311$  a  $T_c = 316$ ) se tiene un nuevo punto de operación estable dado por  $T = 390$  y  $C_A = 0.070$ . Este cambio se ve reflejado en la simulación de la Fig. 1.15 para el caso lineal y no-lineal. Una diferencia de punto de operación y dinámica es observada entre ambos casos. Esto es justificable por la degradación del modelo lineal al escapar del punto de operación para el cual es obtenida. Sin embargo, al disminuir la temperatura de control en  $5^\circ$  (de  $T_c = 311$  a  $T_c = 306$ ) se lleva al reactor a un ciclo límite estable. Este cambio no se ve reflejado en la simulación del caso lineal como ilustrado en la Fig. 1.15. Es más, la linealización predice un nuevo punto de operación estable.

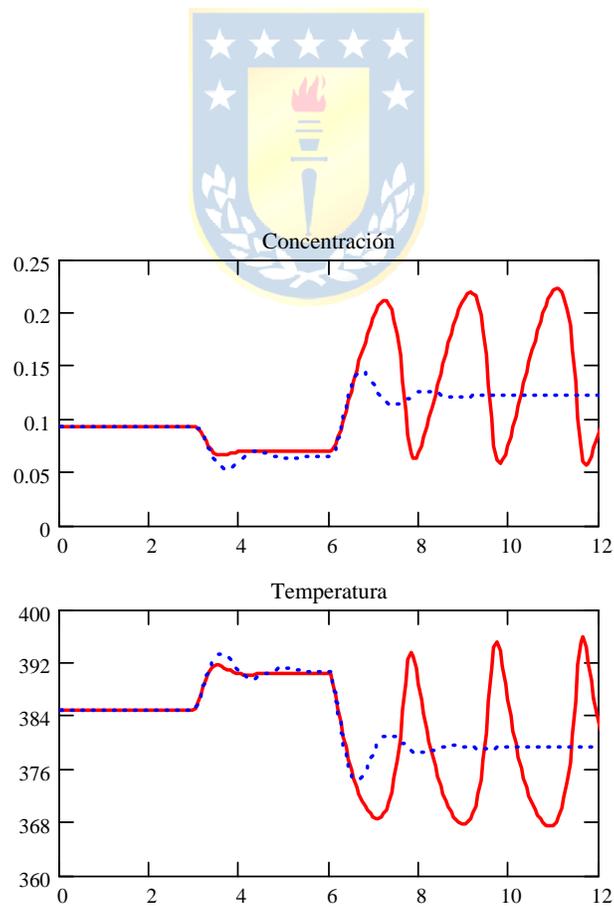
## 1.6 Alcances del Curso 543 703.

En este curso se estudiarán en profundidad sistemas no-lineales del tipo continuo, cuya representación pueda darse de la forma de ecuaciones dinámicas,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Serán de especial interés los sistemas con múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). Además, se revisarán métodos alternativos para el análisis de no-linealidades extremas como histéresis, bandas muertas, saturaciones, etc. El estudio de sistemas considera además el diseño y análisis de controladores lineales y no-lineales aplicados a sistemas no-lineales.



**Fig. 1.15** Simulación del reactor exotérmico con  $T_c = 311 \cdot (1 + 0.018u(t-3) - 0.036u(t-6))$ . La línea continua es la simulación del sistema original y la segmentada es la simulación del sistema linealizado.

## 2 Fundamentos de la Teoría de Lyapunov.

Dada las características propias de sistemas no-lineales, en particular de la estabilidad, no se pueden aplicar los conceptos desarrollados en sistemas lineales. En este capítulo se presentan nuevas herramientas matemáticas y definiciones que permiten abordar este tema. Los conceptos más importantes son los asociados a estabilidad local y global. Sin duda que la Teoría de Lyapunov que aquí se presenta es la más desarrollada para estos casos.

### 2.1 Conceptos de Estabilidad.

La estabilidad de sistemas no-lineales es algo más elaborada que en sistemas lineales debido a las características peculiares de éstos.

#### A. Antecedentes Preliminares.

Un sistema no-lineal puede representarse por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

cuya expresión, aun cuando no contiene  $\mathbf{u}$ , puede representar a un sistema donde  $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ , por lo que la expresión original queda como,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), t),$$

la cual puede ser re-escrita de la forma (2.1). Un sistema es autónomo si (2.1) no depende del tiempo, es decir  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . La gran diferencia entre ellos es que un sistema autónomo tiene asociado un plano de estados que no es función del tiempo. Finalmente, un estado  $\mathbf{x}_0$  es un estado de equilibrio (o punto de equilibrio) del sistema si al hacer  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ , este permanece en el punto para todo tiempo futuro.

#### B. Estabilidad e Inestabilidad.

La estabilidad se define de acuerdo a lo siguiente.

**Def.:** El punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es estable si, para cualquier  $R > 0$ , hay un  $r > 0$ , tal que satisface  $\|\mathbf{x}(0)\| < r$ , entonces  $\|\mathbf{x}(t)\| < R$  para todo  $t \geq 0$ , de otra manera el punto de equilibrio es inestable (estabilidad en el sentido de Lyapunov).

#### C. Estabilidad Asintótica y Estabilidad Exponencial.

Ambos tipos son definidos como sigue.

**Def.:** Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable si es estable y si, en adición, existe algún  $r > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}(0)\| < r$  implica que  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Algunos alcances importantes son: (a) la esfera  $B_r$  se conoce como dominio de atracción, que corresponde al lugar de puntos que eventualmente convergen al origen, Fig. 2.1(a); (b) un punto de equilibrio que es estable, pero no asintóticamente estable se llama marginalmente estable, Fig. 2.1(a), al analizar la Fig. 2.1(a) se encuentra que: (i) curva 1: asintóticamente estable, (ii) curva 2: marginalmente estable, y (iii) curva 3: inestable; (c) convergencia de estados no implica estabilidad. Por ejemplo, en la Fig. 2.1(b), un punto inicial dentro de  $R = 1$  converge a  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , pero siempre sale de  $R = 1$ , por lo tanto el origen no es estable en el sentido de Lyapunov.

**Def.:** Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es exponencialmente estable si existen dos números estrictamente positivos  $\alpha$  y  $\lambda$  tal que  $\forall t > 0, \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\|e^{-\lambda t}$  en alguna esfera  $B_r$  entorno al origen.

Algunos alcances son: (a) el número positivo  $\lambda$  es usualmente conocido como la razón de la convergencia exponencial, (b) la estabilidad exponencial implica estabilidad asintótica, pero lo inverso no necesariamente se cumple.

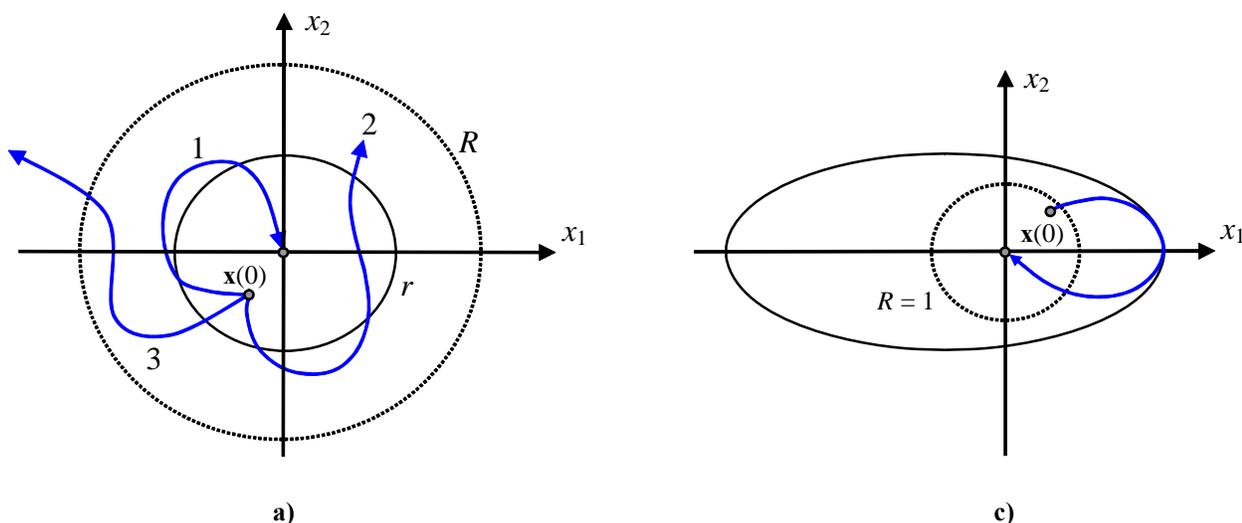
#### D. Estabilidad Local y Estabilidad Global.

Las definiciones anteriores son válidas para caracterizar el comportamiento local de sistemas. Es decir, cómo el sistema evoluciona después de partir cerca del punto de equilibrio.

**Def.:** Si la estabilidad asintótica (o exponencial) es válida para cualesquier condición inicial, el punto de equilibrio es estable asintótico (o exponencial) globalmente.

## 2.2 Linealización y Estabilidad Local.

El método de linealización de Lyapunov se refiere al análisis de la estabilidad local. Dado que todos los sistemas físicos pueden ser considerados no-lineales en algún grado, este método sirve como justificación para el uso de las técnicas lineales en sistemas no-lineales. La linealización del sistema,



**Fig. 2.1** Estabilidad en el plano de estados. (a) Tipos de estabilidad, (b) Convergencia vs estabilidad.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

en torno al punto  $\mathbf{u}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  está dada por,

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}, \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u},$$

donde,  $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}}$ ,  $\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}}$ ,  $\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}}$ ,  $\mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_0}}$ ; y  $\Delta \mathbf{x}$ ,  $\Delta \mathbf{u}$ , y  $\Delta \mathbf{y}$ , son

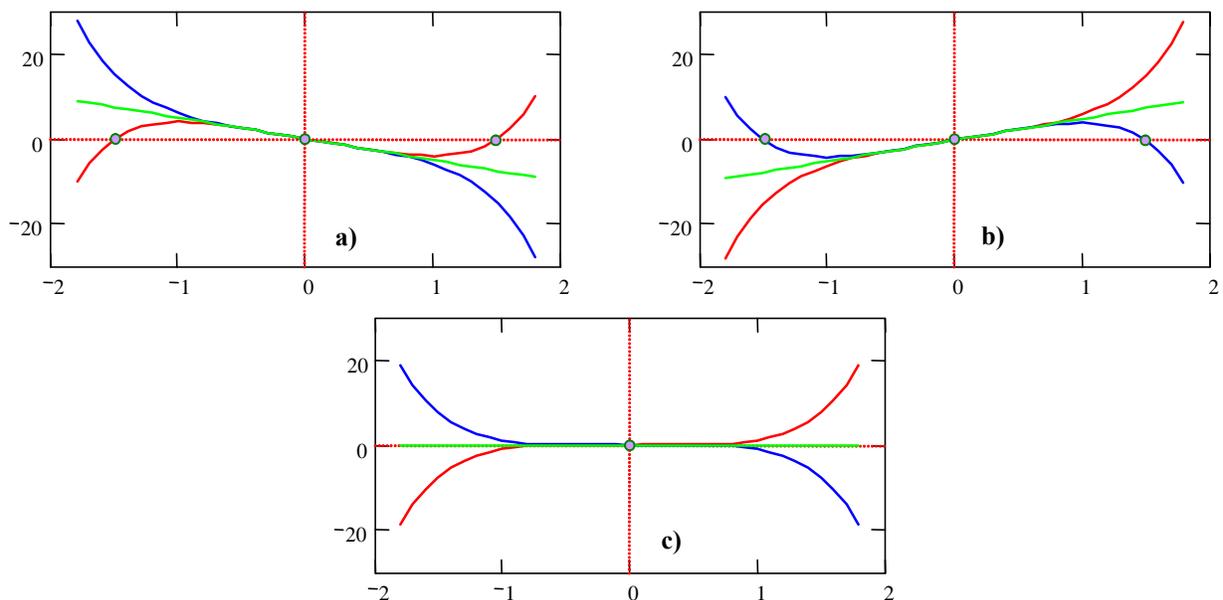
variaciones de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$ , respectivamente, en torno al punto de operación dado por  $\mathbf{u}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ . Nótese que en el caso no-lineal  $\mathbf{u}_0, \mathbf{x}_0$ , e  $\mathbf{y}_0$  satisfacen  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0), \mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ .

**Teorema:** Método de Linealización de Lyapunov.

- (a) Si el sistema linealizado es estable (e.d. si todos los valores propios de  $\mathbf{A}$  están en la mitad izquierda del plano complejo), entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable.
- (b) Si el sistema linealizado es inestable (e.d. a lo menos un valor propio de  $\mathbf{A}$  está en la mitad derecha del plano complejo), entonces el punto de equilibrio es inestable.
- (c) Si el sistema linealizado es marginalmente estable (e.d. todos los valores propios de  $\mathbf{A}$  están en el plano izquierdo, pero al menos uno esta sobre el eje  $j\omega$ ) entonces no se puede concluir nada respecto del punto de equilibrio (es más, el punto de equilibrio puede ser estable, asintóticamente estable, o inestable).

**Ejemplo 2.1.** Estudie la estabilidad del sistema  $\dot{x} = ax + bx^5$  con  $a$  y  $b$  constantes. **R.:** Claramente un punto de equilibrio es  $x_0 = x_0 = 0$  y la linealización es  $\dot{x} = ax$ . De ésta se desprende que si (i)  $a < 0$  entonces el  $x_0 = 0$  es asintóticamente estable, (ii)  $a > 0$  entonces el  $x_0 = 0$  es inestable y (iii)  $a = 0$  entonces nada se puede decir; de hecho, lo que realmente sucede depende de la constante  $b$ , Fig. 2.2. ♣

Como se puede apreciar, el teorema anterior no es suficiente por cuanto quedan varias interrogantes sin respuesta. Entre las más importantes están (a) ¿qué sucede con la estabilidad cuando las raíces están en



**Fig. 2.2** Estabilidad en el Ejemplo 2.1. a)  $a < 0$ , b)  $a > 0$ , c)  $a = 0$ .

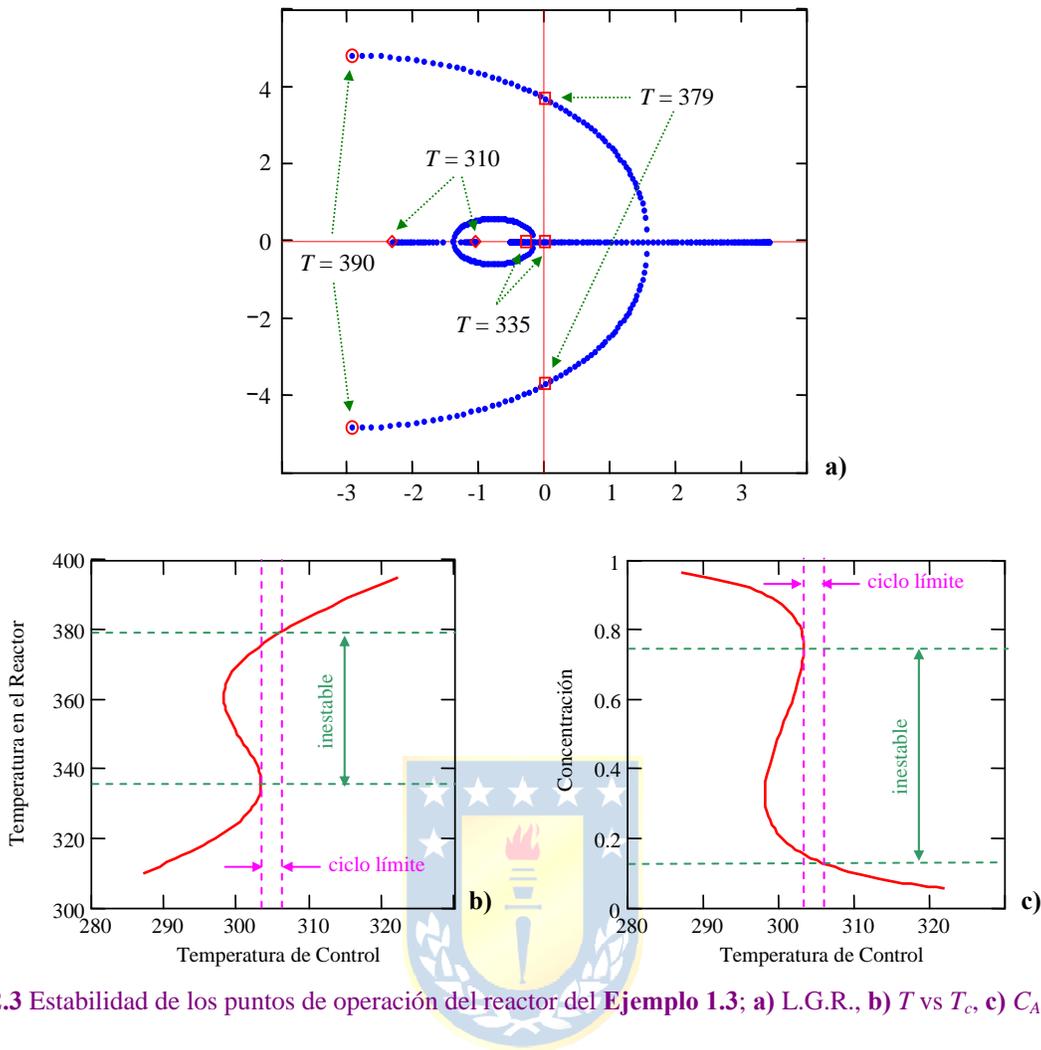


Fig. 2.3 Estabilidad de los puntos de operación del reactor del Ejemplo 1.3; a) L.G.R., b)  $T$  vs  $T_c$ , c)  $C_A$  vs  $T_c$ ,

el eje imaginario? y (b) en el caso de ser estable el origen  $\zeta$  cuál es el dominio de atracción ?.

**Ejemplo 2.2.** Estudie la estabilidad de los puntos de operación del reactor exotérmico. **R.:** Para estos efectos se grafican los valores propios de la matriz  $A$  para distintos puntos de operación. Esto es equivalente a graficar el L.G.R. del sistema, pero en función del punto de operación. La Fig. 2.3(a) muestra el L.G.R. del reactor. Sin duda que para ciertos valores de  $T$  el sistema presenta valores propios inestables, por lo que se tienen puntos de operación inestables. Este es el caso del rango de  $T$  entre 335 y 379°K. Se debe tener especial cuidado con este tipo de casos en sistemas no lineales puesto un punto de operación inestable puede significar la existencia de ciclos límites. Este es el caso del rango ilustrado en la Fig. 2.3(b) y (c) en donde para entradas entre  $T_c = 303$  y 306 se tiene un único punto de operación que es inestable. Sin embargo, la simulación ilustrada en la Fig. 1.15 muestra la existencia de un ciclo límite para esta entrada. Similarmente para entradas  $T_c$  menores a 303 el sistema viajará al único punto de operación inestable. ♣

## 2.3 Método Directo de Lyapunov.

Este método es una extensión natural de una observación física fundamental: *si la energía total de un sistema es continuamente disipada, entonces el sistema (lineal o no) debe eventualmente llegar a un punto equilibrio*. Como la energía es un escalar, el análisis de la estabilidad debiera reducirse al análisis de una función escalar. Por ejemplo, el caso del resorte ilustrado en la Fig. 2.4 puede ser aproximado por la ecuación,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_0x = 0;$$

sin embargo, un análisis más riguroso indica que el modelo es,

$$m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0.$$

Claramente, el manejo de esta ecuación no es obvio como el caso anterior. La energía  $V(x, \dot{x})$  en función de la posición  $x$  y la velocidad  $\dot{x}$  es,

$$V(x, \dot{x}) = 1/2m\dot{x}^2 + \int_0^x (k_0x + k_1x^3)dx = 1/2m\dot{x}^2 + 1/2k_0x^2 + 1/4k_1x^4.$$

Si se define  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T = [x \ dx/dt]^T$ , la ecuación anterior puede ser escrita como,

$$V(\mathbf{x}) = 1/2m\dot{x}_2^2 + 1/2k_0x_1^2 + 1/4k_1x_1^4.$$

La expresión anterior muestra que (a) energía cero corresponde a un punto de equilibrio ( $x_1 = 0, x_2 = 0$ ), (b) estabilidad asintótica implica convergencia de la energía a cero, y (c) inestabilidad implica un crecimiento de la energía. Por otro lado la razón de variación de la energía durante el movimiento del sistema es obtenido diferenciando  $V(\mathbf{x})$  respecto de  $t$  lo que resulta,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= m\dot{x}\ddot{x} + k_0x\dot{x} + k_1x^3\dot{x} \\ &= \dot{x}(-b\dot{x}|\dot{x}| - k_0x - k_1x^3) + k_0x\dot{x} + k_1x^3\dot{x} \\ &= -b\dot{x}^2|\dot{x}| \\ &= -b|\dot{x}|^3 \\ &= -b|x_2|^3 \end{aligned}$$

Dado que  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|x_2|^3$  es siempre negativa, el sistema pierde energía hasta que  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ . El Método Directo de Lyapunov es una generalización del problema anterior. Es decir, se debe encontrar una función  $V(\mathbf{x})$  tipo energía y examinar esta función escalar en el tiempo.

## A. Funciones Definidas Positivas y Funciones de Lyapunov.

La función de energía  $V(\mathbf{x})$  en el ejemplo anterior cumple con:

- i) Es estrictamente positiva (excepto para  $x_1 = 0, x_2 = 0$ )  $\Rightarrow$  la función es Definida Positiva.
- ii) Monótonamente decreciente  $\Rightarrow$  Función de Lyapunov.

**Def.:** Una función escalar continua  $V(\mathbf{x})$  se dice definida positiva localmente si  $V(\mathbf{0}) = 0$  y en una bola  $B_{R_0}$  se cumple  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0$ . Si  $V(\mathbf{0}) = 0$  y la propiedad anterior se cumple en todo el espacio de estados, entonces  $V(\mathbf{x})$  se dice definida positiva globalmente.

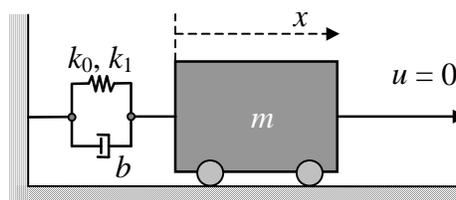


Fig. 2.4 Sistema masa-resorte.

**Ejemplo 2.3.** Determine si (a)  $V(\mathbf{x}) = 1/2ml^2 x_2^2 + mlg(1 - \cos(x_1))$ , (b)  $V(\mathbf{x}) = 1/2mx_2^2 + 1/2k_0x_1^2 + 1/4k_1x_1^4$ , (c)  $V(\mathbf{x}) = 1/2mx_2$ , son definidas positivas locales o globales. **R.:** (a) es localmente puesto que para  $x_1 = 2\pi$  la función  $V(\mathbf{x})$  se hace cero nuevamente, (b) es globalmente, y (c) no lo es. La gráfica de las funciones se encuentra en la Fig. 2.5. ♣

**Def.:** Una función  $V(\mathbf{x})$  es definida negativa si  $-V(\mathbf{x})$  es definida positiva.

**Def.:** Una función  $V(\mathbf{x})$  es semi-definida positiva si  $V(\mathbf{0}) = 0$  y  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .

**Def.:** Una función  $V(\mathbf{x})$  es semi-definida negativa si  $-V(\mathbf{x})$  es semi-definida positiva.

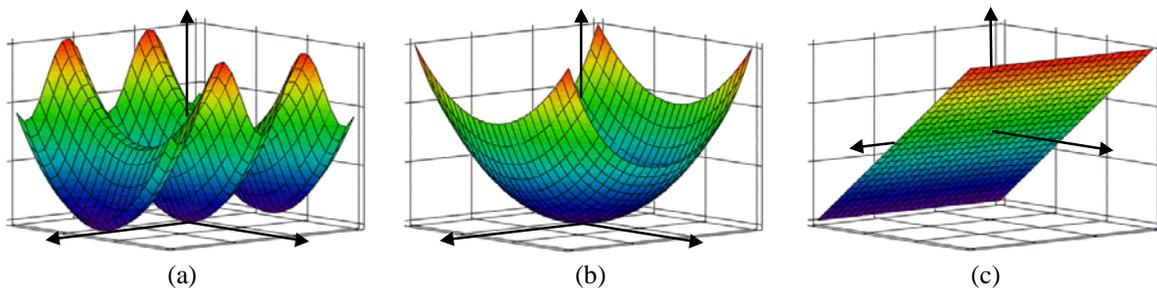
Algunos aspectos importantes son: (a) el prefijo “semi” es usado para reflejar la posibilidad de que  $V(\mathbf{x})$  puede ser cero para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , (b)  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ; es decir, los puntos de equilibrio también satisfacen  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ , y (c) dado que estamos utilizando sistemas autónomos,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  depende sólo de  $\mathbf{x}$ . La función escalar  $\dot{V}(\mathbf{x})$  se conoce como “la derivada de  $V$  a lo largo de la trayectoria del sistema”. Un caso especial es cuando  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es negativa.

**Def.:** Si en una bola  $B_{R_0}$  la función  $V(\mathbf{x})$  es definida positiva y tiene derivadas parciales continuas, y su derivada respecto del tiempo a lo largo de las trayectorias de los estados del sistema es semi-definida negativa; es decir,  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ , entonces  $V(\mathbf{x})$  es una Función de Lyapunov para el sistema.

En una función  $V(\mathbf{x})$  que es función de Lyapunov siempre se encuentra que cualesquier trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  reflejada en la función  $V(\mathbf{x})$  representa una disminución de  $V(\mathbf{x})$ . Este efecto se puede apreciar geoméricamente en la Fig. 2.5(b), donde claramente el paso por una trayectoria que va de  $\mathbf{x}_a$  a  $\mathbf{x}_b$  tiene asociado el paso de un valor de  $V(\mathbf{x}_a)$  a otro de menor valor  $V(\mathbf{x}_b)$ .

## B. Teoremas para los Puntos de Equilibrio.

**Teorema: Lyapunov para Estabilidad Local:** Si, en una bola  $B_{R_0}$ , existe una función escalar  $V(\mathbf{x})$  con primeras derivadas parciales continuas tal que,



**Fig. 2.5** Funciones (a), (b) y (c) del Ejemplo 2.3. (a) definida positiva localmente, (b) definida positiva globalmente, (c) no es definida positiva.

- $V(\mathbf{x})$  es definida positiva (localmente  $B_{R_0}$ ),
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  es semi-definida negativa (localmente en  $B_{R_0}$ ),

entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es estable. Si la derivada  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es localmente definida negativa en  $B_{R_0}$ , entonces la estabilidad es asintótica.

**Ejemplo 2.4.** Estudie la estabilidad del sistema dado por  $\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2$ ,  $\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$  el cual tiene por punto de equilibrio al  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . **R.:** Sea la función de Lyapunov  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ , entonces se tiene que  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 2)$ . Por lo tanto, dado que la función  $V(\mathbf{x})$  es globalmente definida positiva y su derivada es localmente definida negativa, el punto  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable. Es más, el dominio de atracción está dada por lo menos por  $x_1^2 + x_2^2 < 2$ , Fig. 2.6. ♣

**Ejemplo 2.5.** Estudie la estabilidad en el caso del péndulo donde  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -g/l \sin x_1 - (b/(ml^2))x_2$ . **R.:** La energía asociada es,  $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + \int_0^{x_1} mgl \sin y dy = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1)$ ,  $\therefore \dot{V}(\mathbf{x}) = mgl\dot{x}_1 \sin(x_1) + ml^2x_2\dot{x}_2 = -bx_2^2 \leq 0$ ,

dado que  $V(\mathbf{x})$  es localmente definida positiva y  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es semi-definida negativa, entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es estable, pero nada se puede decir de la estabilidad asintótica de este. Es poco auspicioso el hecho de encontrar que la función de energía del péndulo no permite concluir que el origen es asintóticamente estable, aún cuando es obvio que lo es (el péndulo siempre queda en reposo si no hay fuerza externa al considerar roce). ♣

**Teorema: Lyapunov para Estabilidad Global:** Asumir que existe una función escalar  $V(\mathbf{x})$ , con derivadas de primer orden continuas tal que,

- $V(\mathbf{x})$  es definida positiva,
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  es definida negativa,
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ,

entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es globalmente asintóticamente estable.

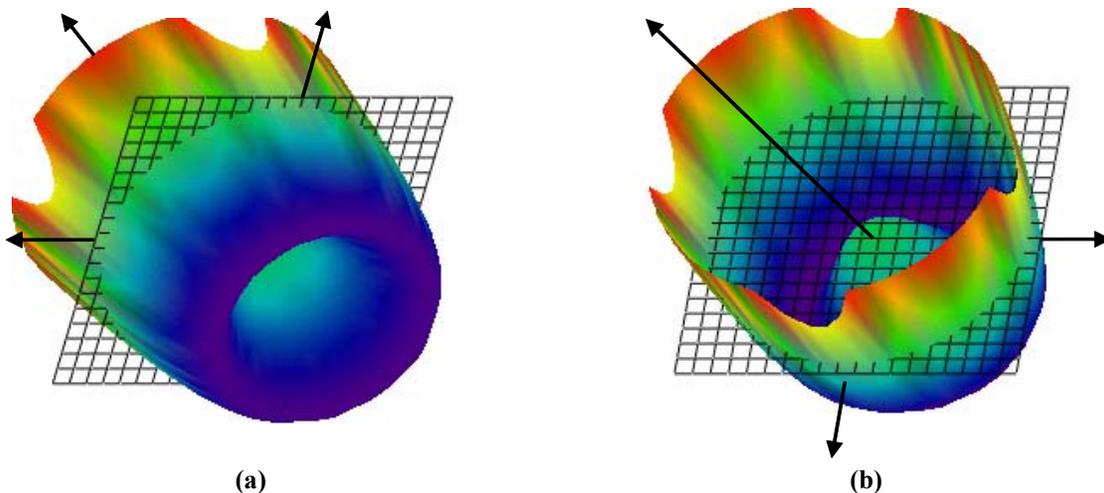


Fig. 2.6 Derivada de la Función de Lyapunov del Ejemplo 2.4; a) vista 1, b) vista 2.

**Ejemplo 2.6.** Estudie la estabilidad del sistema  $\dot{x} = ax + bx^5$  con  $a = 0$ . **R.:** El sistema queda  $\dot{x} = bx^5$  el que no puede ser descrito mediante linealización para efectos de analizar la estabilidad. Si se define  $V(x) = x^2$ , entonces  $\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = 2bx^6 < 0$  si  $b < 0 \forall x$ . Por lo que el  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable. Es globalmente, puesto que se cumple también que  $V(x) \rightarrow \infty$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ . En general, para el caso  $\dot{x} + f(x) = 0$  si se cumple que  $xf(x) > 0$  para  $x \neq 0$  y  $xf(x) = 0$  para  $x = 0$ , entonces el  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable (una función de Lyapunov es  $V(x) = x^2$ ), , Fig. 2.2(c). ♣

En el caso de que  $\dot{V}(x)$  es semi-definida negativa nada se puede concluir respecto de la estabilidad asintótica. Este es el caso del péndulo y del resorte al utilizar la función de energía como función de Lyapunov. Los siguientes teoremas ayudan en estos casos.

### C . Teoremas de los Conjuntos Invariantes.

Permiten en el caso de encontrar  $\dot{V}(x)$  semi-definida concluir respecto de la característica asintótica del punto de equilibrio.

**Def.:** Un conjunto  $G$  es un conjunto invariante para un sistema dinámico si cada trayectoria del sistema, que parte desde un punto en  $G$ , éste permanece en  $G$  para todo tiempo futuro.

Son por ejemplo: puntos de equilibrio, dominio de atracción, ciclos límite, etc. Un caso trivial podría ser todo el espacio de estados.

**Teorema: Conjuntos Invariantes Local:** Considerar un sistema autónomo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{f}$  continuo, y sea  $V(\mathbf{x})$  una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Asumir que,

- para algún  $l > 0$ , la región  $\Omega_l$  definida por  $V(\mathbf{x}) < l$  es acotada,
- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  para todo  $\mathbf{x}$  en  $\Omega_l$ ,

y sea  $\mathbf{R}$  en conjunto de puntos dentro de  $\Omega_l$  donde  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  y  $\mathbf{M}$  el más grande conjunto invariante en  $\mathbf{R}$ . Entonces, cada solución  $\mathbf{x}(t)$  que se origine en  $\Omega_l$  tenderá a  $\mathbf{M}$  a medida que

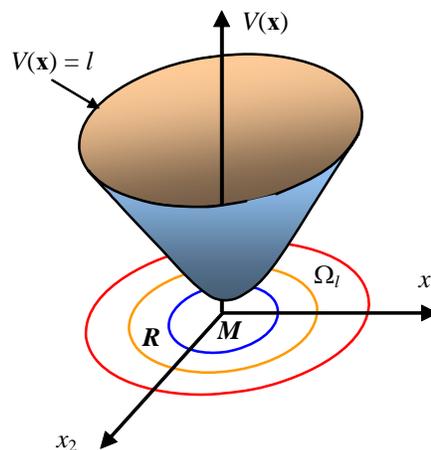


Fig. 2.7 Conjuntos invariantes geoméricamente.

$t \rightarrow \infty$  (Fig. 2.7).

**Ejemplo 2.7.** Estudiar el caso del resorte. **R.:** Se tenía  $V(\mathbf{x}) = 1/2mx_2^2 + 1/2k_0x_1^2 + 1/4k_1x_1^4$  y  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|x_2|^3 \leq 0$  por lo que sólo se puede identificar a  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  como estable. El teorema anterior indica que **R:**  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -b|x_2|^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ ; es decir, el conjunto **R** está dado por los pares  $(x_1, x_2 = 0) = (x_1, 0)$ . **M** es el conjunto invariante más grande dentro de **R** y para encontrarlo asumamos que  $\mathbf{M} = \mathbf{R}$  por lo que tales pares pueden ser  $(x_1, 0)$ ; sin embargo, la ecuación del resorte es  $m\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + k_0x + k_1x^3 = 0$  que se puede escribir como  $m\dot{x}_2 + bx_2|x_2| + k_0x_1 + k_1x_1^3 = 0$  por lo que los pares de **M** deben cumplir con  $m\dot{x}_2 + k_0x_1 + k_1x_1^3 = 0$ , como  $x_1$  es arbitrario entonces  $\dot{x}_2 \neq 0$  lo que implica que  $x_2 \neq 0$  y con esto se sale del conjunto **M**. La única condición es cuando además se cumple que  $x_1 = 0$ . Por lo tanto, el conjunto es **M:**  $(0, 0)$ , y de acuerdo al teorema anterior, el  $(0, 0)$  es entonces asintóticamente estable. ♣

**Corolario:** Considerar un sistema autónomo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , con **f** continuo, y sea  $V(\mathbf{x})$  una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Asumir que en una vecindad  $\Omega$  del origen,

- $V(\mathbf{x})$  definida positiva localmente,
- $\dot{V}(\mathbf{x})$  semi-definida negativa,
- el conjunto **R** tal que  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  no contiene trayectorias de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  que no sea  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,

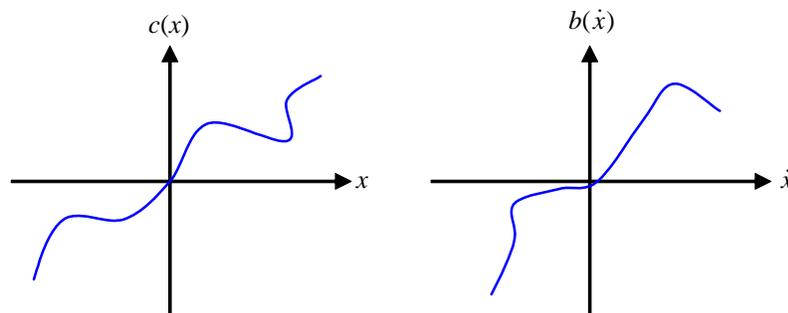
entonces, el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable. Más aún, la región más grande en  $\Omega_l$  (definida por  $V(\mathbf{x}) < l$ ) en  $\Omega$  es un dominio de atracción del punto de equilibrio.

**Teorema: Conjuntos Invariantes Global:** Considerar un sistema autónomo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , con **f** continuo, y sea  $V(\mathbf{x})$  una función escalar con primeras derivadas parciales continuas. Asumir que,

- $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  en todo el espacio de estado,
- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ,

y sea **R** el conjunto de todos los puntos donde,  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ , y **M** el conjunto invariante más grande en **R**. Entonces todas las soluciones convergen globalmente asintóticamente a **M** cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Ejemplo 2.8.** Sea el caso  $\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0$  donde se cumple que  $\dot{x}b(\dot{x}) > 0$  para  $\dot{x} \neq 0$  y  $xc(x) > 0$  para  $x \neq 0$ , Fig. 2.8.



**Fig. 2.8** Funciones del Ejemplo 2.8 para satisfacer el criterio de estabilidad asintótica.

Analizar la estabilidad del origen. **R.:** Sea la función de Lyapunov  $V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x c(y) dy$ , de donde se obtiene que

$\dot{V}(x, \dot{x}) = \ddot{x} + c(x)\dot{x} = -\dot{x}b(\dot{x}) \leq 0$  por lo tanto el origen es estable. El teorema anterior indica que **R:**  $\dot{V}(x, \dot{x}) = -\dot{x}b(\dot{x}) = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$ ; es decir, el conjunto **R** está dado por los pares  $(x, \dot{x} = 0) = (x, 0)$ . **M** es el conjunto invariante más grande dentro de **R** y por tanto es  $(0, 0)$ . Así y de acuerdo al teorema anterior, el  $(0, 0)$  es globalmente asintóticamente estable, puesto que

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int_0^x c(y) dy \rightarrow \infty \text{ cuando } \| \mathbf{x} \| \rightarrow \infty. \clubsuit$$

## 2.4 Análisis de Sistemas Basados en el Método Directo de Lyapunov.

La mayor dificultad es encontrar la función de Lyapunov. Algunos métodos para encontrarla son (a) experiencia, (b) intuición, y (c) física del sistema.

### A. Análisis de Lyapunov de Sistemas Lineales Invariantes.

Para esto es necesario introducir el concepto de matriz definida positiva.

**Def.:** Una matriz cuadrada **M** de  $n \times n$  es definida positiva si  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  entonces se cumple que  $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0$ .

Una condición necesaria para que **M** sea definida positiva es que los elementos de su diagonal sean positivos. Si **M** es simétrica, **M** es definida positiva si y sólo si sus menores principales  $(m_{11}, m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}, \dots, \det\{\mathbf{M}\})$  son todos estrictamente positivos o todos sus valores propios son positivos (Teorema de Sylvester). Con este resultado se puede establecer un procedimiento para sistemas lineales. Sea el sistema dado por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  y una función de Lyapunov  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  la cual es definida positiva si **P** es definida positiva. Al obtener  $\dot{V}(\mathbf{x})$  se tiene que  $\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T (-\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ , por lo que si **Q** =  $-(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})$  es definida positiva, entonces el origen es asintóticamente estable. Un alternativa es darse la matriz **Q** definida positiva, encontrar la matriz **P** y si esta es definida positiva, entonces se concluye que el origen es asintóticamente estable. Lamentablemente si **P** no es definida positiva nada se puede concluir. Para esto se tiene el siguiente teorema.

**Teorema:** Una condición necesaria y suficiente para que un sistema lineal invariante  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  sea estrictamente estable es que, para cualquier matriz **Q** simétrica definida positiva, la solución **P** de la ecuación de Lyapunov  $\mathbf{Q} = -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})$  sea definida positiva simétrica.

**Ejemplo 2.9.** Sea el caso lineal donde  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$ , determine la estabilidad del origen. **R.:** Se opta por la matriz **Q** =

$$\mathbf{I} \text{ por lo que } \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ cuya solución, considerando } p_{12} =$$

$p_{21}, p_{11} = 5/16, p_{12} = p_{22} = 1/16$ , es  $\mathbf{P} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . La matriz **P** es definida positiva por cuanto es simétrica y sus valores propios son  $(3 \pm \sqrt{5})/16$ , ambos positivos.  $\clubsuit$

## B. Método de Krasovskii

Corresponde a una extensión del método lineal a sistemas no-lineales del tipo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

**Teorema:** Sea el sistema autónomo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  con el origen como punto de equilibrio y sea  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  el Jacobiano  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \partial \mathbf{f}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$ . Si la matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  definida como  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})^T$  es definida negativa en un entorno  $\Omega$ , entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Una función de Lyapunov para ese sistema es  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Si  $\Omega$  es todo el espacio de estados y  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ , entonces el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable.

**Ejemplo 2.10.** Sea el caso  $\dot{x}_1 = -6x_1 + 2x_2$ ,  $\dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3$  determine la estabilidad del origen. **R.:** Se tiene que  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -6 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$  por lo que  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 - 12x_2^2 \end{bmatrix}$  que es definida negativa en todo el espacio de estados (sus valores propios son siempre negativos). Además, se encuentra que  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (-6x_1 + 2x_2)^2 + (2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3)^2 \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  por lo que la estabilidad es global. ♣

## C. Funciones de Lyapunov Mediante Análisis Fenomenológico.

Un uso intensivo de la física del sistema debería permitir encontrar la función de Lyapunov. Sea el caso de un brazo robótico. La ecuación matricial que describe el sistema es,

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau},$$

donde,  $\mathbf{q}$ : vector de posición ( $n \cdot 1$ ),  $\boldsymbol{\tau}$ : torques de entrada,  $\mathbf{g}$ : vector de torques gravitacionales,  $\mathbf{b}$ : fuerzas de coriolis y centrípeta y  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ : matriz de inercias que es definida positiva. Sea el controlador PD con compensador de torques gravitacionales  $\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_P \mathbf{q} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$  donde  $\mathbf{K}_D$  y  $\mathbf{K}_P$  son matrices definidas positivas de  $n \cdot n$ . Nótese que el control PD introduce damping. Sea la función de Lyapunov  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \{ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^T \mathbf{K}_P \mathbf{q} \}$  donde el primer término representa la energía cinética y el segundo la energía potencial. Entonces,  $\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{g}) + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \mathbf{q} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{q}}$ . Como  $\mathbf{K}_D$  es definida positiva entonces  $\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es semi-definida negativa lo que indica que el origen  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$  es sólo estable. Sin embargo, el teorema de conjuntos invariantes asegura que el origen es además asintóticamente estable (en este caso **R:**  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0})$  por lo que  $\mathbf{M}$  es sólo el origen). Es más, dado que  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{q}\| \rightarrow \infty$ , el origen es globalmente asintóticamente estable.

## D. Análisis de Velocidad de Convergencia

En sistemas que convergen al origen puesto que son asintóticamente estables la pregunta que se tiene es cuán rápido lo hacen. Esta pregunta se responde por separado en sistemas lineales y luego no-lineales.

En sistemas lineales se tiene el siguiente lema.

**Lema:** Si una función real  $w(t)$  satisface  $\dot{w}(t) + \alpha w(t) \leq 0$  donde  $\alpha$  es un número real, entonces siempre se cumple que  $w(t) \leq w(0)e^{-\alpha t}$ .

Si se hace  $\dot{w}(t) + \alpha w(t) = z(t)$  entonces  $z(t)$  es negativa o cero. La solución de esta ecuación es  $w(t) = w(0)e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} z(\tau) d\tau$  donde la parte de la integral es siempre negativa o cero dado que  $z(t)$  es negativa o cero. Por lo tanto, se cumple que  $w(t) \leq w(0)e^{-\alpha t}$ .

Por otro lado, de la teoría de matrices, para  $\mathbf{A}$  simétrica definida positiva se cumple que  $\lambda_{\min}(\mathbf{A})\mathbf{x}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A})\mathbf{x}^T\mathbf{x}$  (por cuanto los valores propios son iguales a los valores singulares) y si se considera a  $\gamma = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}$ , se puede escribir,  $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \geq \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}\mathbf{x}^T(\lambda_{\max}(\mathbf{P})\mathbf{I})\mathbf{x} \geq \gamma V$ . Como  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$  entonces  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\gamma V(\mathbf{x})$  y por el lema anterior  $V(\mathbf{x}) \leq V(0)e^{-\gamma t}$  o también  $\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} \leq V(0)e^{-\gamma t}$  y considerando que  $\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ , entonces  $\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq V(0)e^{-\gamma t}$  de donde finalmente se tiene que  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0)}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}}e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ , lo que implica que el vector de estados converge con una razón de convergencia de a lo menos  $\gamma/2$ .

**En sistemas no-lineales** se tiene para cada caso un análisis distinto. Sea por ejemplo el caso  $\dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - 4x_1x_2^2$ ,  $\dot{x}_2 = 4x_1^2x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2)$  en donde se utiliza  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = \|\mathbf{x}\|^2$  lo que resulta en  $\dot{V} = 2V(V - 2)$  de donde se puede obtener que  $\frac{dV}{V(2-V)} = -2dt$ , cuya solución es  $V(t) = \frac{\alpha e^{-2t}}{1 + \alpha e^{-2t}}$ , con  $\alpha = \frac{V(0)}{2 - V(0)}$ . Si  $\|\mathbf{x}(0)\|^2 = V(0) < 2$ , es decir si la trayectoria esta dentro del circulo de radio  $\sqrt{2}$ ,  $\alpha > 0$  y por lo tanto  $V(t) < \alpha e^{-2t}$  o también que  $\|\mathbf{x}\|^2 < \alpha e^{-2t}$ . Finalmente,  $\|\mathbf{x}\| < \sqrt{\alpha}e^{-t}$  por lo que la norma del vector de estados  $\|\mathbf{x}\|$  converge exponencialmente a cero con una razón de convergencia menor a 1.

## 2.5 Diseño de Sistemas Basado en Lyapunov.

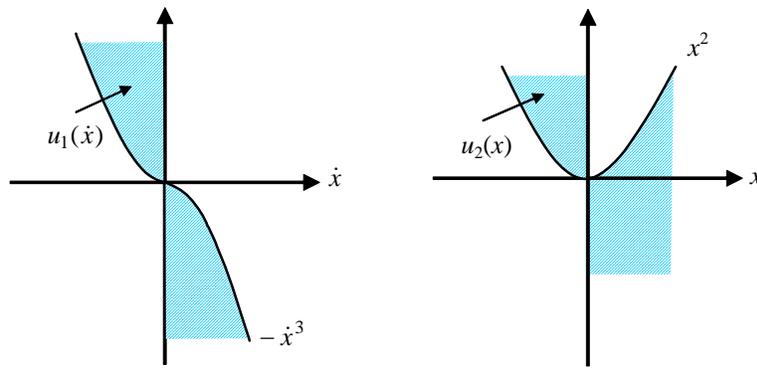
Hasta ahora no se ha hecho mención del tipo de entrada presente en un sistema ni cómo debe escogerse en un sistema en particular. Uno de los problemas de control es encontrar la entrada adecuada para estabilizar al sistema.

### A. Regulador No-lineal.

Sea por ejemplo el sistema definido por la ecuación,  $\ddot{x} - \dot{x}^3 + x^2 = u$ . Se debe encontrar la entrada  $u$  para estabilizar el sistema. La ecuación se asemeja al caso  $\ddot{x} + b(\dot{x}) + c(x) = 0$  donde debe asegurarse que  $\dot{x}b(\dot{x}) > 0$  para  $\dot{x} \neq 0$  y  $xc(x) > 0$  para  $x \neq 0$  para asegurar la estabilidad del sistema. Por lo tanto, si se hace la entrada  $u = u_1(\dot{x}) + u_2(x)$  se tiene el sistema resultante,  $\ddot{x} + (-\dot{x}^3 - u_1(\dot{x})) + (x^2 - u_2(x)) = 0$ , de donde se tienen las restricciones,

- $(-\dot{x}^3 - u_1(\dot{x}))\dot{x} > 0 \Rightarrow (\dot{x}^3 + u_1(\dot{x}))\dot{x} < 0$  para  $\dot{x} \neq 0$
- $(x^2 - u_2(x))x > 0$  para  $x \neq 0$

Lo que puede ser re-escrito como,



**Fig. 2.9** Áreas para las entradas estabilizadoras del controlador regulador.

- a) si  $\dot{x} > 0 \Rightarrow \dot{x}^3 + u_1(\dot{x}) < 0$     y    si  $\dot{x} < 0 \Rightarrow \dot{x}^3 + u_1(\dot{x}) > 0$
- b) si  $x > 0 \Rightarrow x^2 - u_2(x) > 0$     y    si  $x < 0 \Rightarrow x^2 - u_2(x) < 0$

y que finalmente resulta en

- a) si  $\dot{x} > 0 \Rightarrow u_1(\dot{x}) < -\dot{x}^3$     y    si  $\dot{x} < 0 \Rightarrow u_1(\dot{x}) > -\dot{x}^3$
- b) si  $x > 0 \Rightarrow u_2(x) < x^2$     y    si  $x < 0 \Rightarrow u_2(x) > x^2$

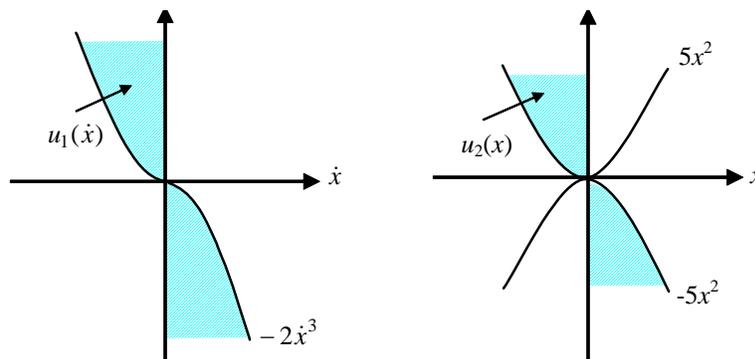
La Fig. 2.9 muestra el área donde se puede encontrar la función  $u_1(\dot{x})$  y  $u_2(x)$  para asegurar el cumplimiento de las restricciones.

**B. Controlador Robusto.**

Es de interés cuando hay incertidumbre en los parámetros. En este caso se necesita un controlador robusto. Sea por ejemplo,  $\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x}^3 + \alpha_2 x^2 = u$ , en donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  tienen los rangos  $\alpha_1 > -2$  y  $|\alpha_2| < 5$  para lo cual hay que diseñar  $u$  de manera que se asegure que el origen sea asintóticamente estable. Para esto se define la entrada como  $u = u_1(\dot{x}) + u_2(x)$  por lo que se obtiene  $\ddot{x} + (\alpha_1 \dot{x}^3 - u_1(\dot{x})) + (\alpha_2 x^2 - u_2(x)) = 0$ . La estabilidad se asegura si,

- a)  $(\alpha_1 \dot{x}^3 - u_1(\dot{x}))\dot{x} > 0$  para  $\dot{x} \neq 0$
- b)  $(\alpha_2 x^2 - u_2(x))x > 0$  para  $x \neq 0$

Lo que puede ser re-escrito como,



**Fig. 2.10** Áreas para las entradas estabilizadoras del control robusto.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \text{si } \dot{x} > 0 \Rightarrow \alpha_1 \dot{x}^3 - u_1(\dot{x}) > 0 \quad \text{y} \quad \text{si } \dot{x} < 0 \Rightarrow \alpha_1 \dot{x}^3 - u_1(\dot{x}) < 0 \\ \text{b)} & \text{si } x > 0 \Rightarrow \alpha_2 x^2 - u_2(x) > 0 \quad \text{y} \quad \text{si } x < 0 \Rightarrow \alpha_2 x^2 - u_2(x) < 0 \end{array}$$

y que finalmente resulta en

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \text{si } \dot{x} > 0 \Rightarrow u_1(\dot{x}) < \alpha_1 \dot{x}^3 \quad \text{y} \quad \text{si } \dot{x} < 0 \Rightarrow u_1(\dot{x}) > \alpha_1 \dot{x}^3 \\ \text{b)} & \text{si } x > 0 \Rightarrow u_2(x) < \alpha_2 x^2 \quad \text{y} \quad \text{si } x < 0 \Rightarrow u_2(x) > \alpha_2 x^2 \end{array}$$

La Fig. 2.10 muestra el área donde se puede encontrar la función  $u_1(\dot{x})$  y  $u_2(x)$  para asegurar el cumplimiento de las restricciones.



### 3 Teoría de Estabilidad Avanzada.

En este capítulo se extienden los conceptos de estabilidad desarrollados para sistemas no-lineales autónomos a sistemas no-lineales no-autónomos. Son el caso particular de sistemas en que hay parámetros que dependen del tiempo, condición que se encuentra en mayor o menor grado en todos los sistemas físicos reales. Para su análisis se presentan nuevas definiciones y herramientas matemáticas. Similarmente al caso de sistemas autónomos, los conceptos más importantes son los asociados a estabilidad local y global para lo cual se recurre a la Teoría de Lyapunov Avanzada.

#### 3.1 Conceptos de Estabilidad

Los sistemas no-autónomos son caracterizados por la ecuación general,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

en el cual se asume que la entrada está redefinida en función de las variables de estado y por tanto la expresión está en una forma generalizada. Un caso particular es,  $\dot{x} = -\frac{x}{1+x^2}a(t)$ , en donde claramente el parámetro  $a(t)$  hace que el sistema sea no-autónomo. La definición de punto de equilibrio entonces queda como sigue.

**Def.:** El sistema no-autónomo dado por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  tiene a  $\mathbf{x}_0$  como punto de equilibrio si se cumple  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq t_0$ . Es decir, el sistema permanece en  $\mathbf{x}_0$  para todo tiempo futuro a  $t_0$ .

**Ejemplo 3.1.** Sea el sistema lineal variante en el tiempo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  el cual tiene a  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  como punto de equilibrio siempre que  $\mathbf{A}(t)$  es no singular. Estudie el caso no-lineal variante en el tiempo  $\dot{x} = -\frac{x}{1+x^2}a(t) + b(t)$ . **R.:** El origen  $x_0 = 0$  es el punto de equilibrio si  $b(t) = 0$  y no tiene puntos de equilibrio si  $b(t) \neq 0$ . ♣

**Def.:** El punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es estable a  $t_0$  si para cualquier  $R > 0$ , hay un  $r(R, t_0) > 0$ , tal que satisface  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < r$ , entonces  $\|\mathbf{x}(t)\| < R$  para todo  $t \geq t_0$ . De otra manera el punto de equilibrio es inestable.

**Def.:** Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable al instante  $t_0$  si es estable y si, en adición, existe algún  $r(t_0) > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < r(t_0)$  implica que  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Def.:** Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es exponencialmente estable si existen dos números estrictamente positivos  $\alpha$  y  $\lambda$  tal que para un  $\mathbf{x}(t_0)$  suficientemente pequeño se cumple que  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}$ .

$\lambda^{(t-t_0)}$  para todo  $t \geq t_0$ .

**Def.:** El punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es globalmente asintóticamente estable si  $\forall \mathbf{x}(t_0)$  se cumple que  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Ejemplo 3.2.** Estudie la estabilidad del sistema  $\dot{x}(t) = -a(t)x(t)$  cuya solución es  $x(t) = x(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a(r)dr}$ . **R.:** El sistema es estable si  $a(t) \geq 0, \forall t \geq t_0$ ; es asintóticamente estable si  $\int_0^\infty a(r)dr = +\infty$ ; es exponencialmente estable si existe un número positivo  $T$  tal que  $\forall t \geq 0 \int_t^{t+T} a(r)dr \geq \gamma$ , con  $\gamma$  constante y positivo. Así, para  $a(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$  el sistema es estable pero no asintóticamente estable, para  $a(t) = \frac{1}{(1+t)}$  el sistema es asintóticamente estable y para  $a(t) = t$  el sistema es exponencialmente estable. ♣

**Def.:** El punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es localmente uniformemente estable si el escalar  $r$  en la definición de estabilidad puede ser escogido independiente de  $t_0$ ; es decir,  $r = r(R)$ .

**Def.:** El punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es localmente uniformemente asintóticamente estable si éste es uniformemente estable y hay una esfera de atracción  $B_{R_0}$ , cuyo radio es independiente de  $t_0$ , tal que cualquier trayectoria con estados iniciales en  $B_{R_0}$  converge a  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  uniformemente en  $t_0$ .

Por convergencia uniforme en términos de  $t_0$  se entiende que todo  $R_1$  y  $R_2$  que cumplen  $0 < R_2 < R_1 \leq R_0 \exists T(R_1, R_2) > 0$  tal que  $\forall t_0 \geq 0$  se cumple que  $\|\mathbf{x}(t_0)\| < R_1 \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R_2, \forall t \geq t_0 + T(R_1, R_2)$ . Es decir, la trayectoria de los estados, que parte dentro de una esfera  $B_{R_1}$ , converge en una esfera menor  $B_{R_2}$  después de un período  $T$  que es independiente de  $t_0$ .

El concepto de globalmente uniformemente asintóticamente estable se puede definir reemplazando la bola  $B_{R_0}$  por todo el espacio de estados.

**Ejemplo 3.3.** Estudiar la convergencia uniforme de  $\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$ . **R.:** El sistema tiene por solución a  $x(t) = \frac{1+t_0}{1+t}x(t_0)$  que converge asintóticamente al origen pero su convergencia no es uniforme puesto que intuitivamente para grandes valores de  $t_0$  se requiere más tiempo para llegar al origen. ♣

## 3.2 Análisis de Sistemas No–autónomos

Aquí se revisan los principios de estabilidad de sistemas no-autónomos. Para esto se explora el efecto de dualidad entre éstos y los sistemas autónomos.

### A. Método Directo de Lyapunov Aplicado a Sistemas No–Autónomos.

Como es de esperar, se necesita reformular el concepto de funciones definidas positivas y sus derivados para sistemas no-autónomos.

**Def.:** Una función escalar continua tiempo-variante  $V(\mathbf{x}, t)$  se dice localmente definida positiva si  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  y existe una función definida positiva tiempo-invariante  $V_0(\mathbf{x})$  tal que  $V(\mathbf{x}, t) \geq V_0(\mathbf{x})$ ,  $\forall t \geq t_0$ .

Informalmente se dice que  $V(\mathbf{x}, t)$  es localmente definida positiva si domina a una función definida positiva tiempo-invariante  $V_0(\mathbf{x})$ . Definiciones similares se tienen para semi-definida positiva, negativa, semi-definida negativa y para global. Así, una función  $V(\mathbf{x}, t)$  es definida negativa si la función  $-V(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva. Una función  $V(\mathbf{x}, t)$  es semi-definida positiva si domina a una función tiempo-invariante semi-definida positiva  $V(\mathbf{x})$ . Finalmente,  $V(\mathbf{x}, t)$  es semidefinida-negativa si  $-V(\mathbf{x}, t)$  es semi-definida positiva.

Además, se hace necesario introducir el concepto de funciones decrecientes.

**Def.:** Una función escalar  $V(\mathbf{x}, t)$  es decreciente si  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  y existe una función definida positiva tiempo-invariante  $V_1(\mathbf{x})$  tal que  $V(\mathbf{x}, t) \leq V_1(\mathbf{x})$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Se dice que  $V(\mathbf{x}, t)$  es decreciente si es dominada por una función definida positiva tiempo-invariante  $V_1(\mathbf{x})$ .

---

**Ejemplo 3.4.** Estudie si la función  $V(\mathbf{x}, t) = (1 + \sin^2(t))(x_1^2 + x_2^2)$  es definida positiva. **R.:** Lo es, puesto que domina la función tiempo-invariante  $V_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$  y es decreciente dado que es dominada por la función  $V_1(\mathbf{x}) = 2(x_1^2 + x_2^2)$ . ♣

---

Nótese que en este caso se tiene que la derivada a lo largo de la trayectoria es,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

El resultado resumido del teorema de Lyapunov se tiene a continuación.

**Teorema: Lyapunov para Sistemas No-Autónomos:** Si, en una bola  $B_{R_0}$  alrededor del  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  existe una función escalar  $V(\mathbf{x}, t)$  con primeras derivadas parciales continuas tal que,

1.  $V(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva,
2.  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es semi-definida negativa,

entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es estable en el sentido de Lyapunov. Si además,

3.  $V(\mathbf{x}, t)$  es decreciente,

entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es uniformemente estable. Si la condición 2 es restringida a que  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  sea definida negativa, entonces el  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es uniformemente asintóticamente estable. Si la bola  $B_{R_0}$  es reemplazada por todo el espacio de estados, y se cumple 1, 2 restringida y 3, y además,

4.  $V(\mathbf{x}, t)$  es radialmente no acotada,

entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

**Ejemplo 3.5.** El sistema dado por  $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - e^{-2t}x_2(t)$ ,  $\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$  tiene al origen como punto de equilibrio. Determine la estabilidad de éste. **R.:**

Condición 1: la función  $V(\mathbf{x}, t) = x_1^2 + (1 + e^{-2t})x_2^2$  es definida positiva puesto que domina la función definida positiva tiempo-invariante  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow$  se cumple condición 1.

Condición 2: como  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2(1 + 2e^{-2t}))$  ó  $-\dot{V}(\mathbf{x}, t) = 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2(1 + 2e^{-2t}))$  que es definida positiva pues domina a la función tiempo-invariante definida positiva  $V(\mathbf{x}) = 2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2$  por lo que  $-\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva o  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es definida negativa  $\Rightarrow$  se cumple la condición 2 en su modo restringido.

Condición 3: al considerar la función tiempo-invariante definida positiva  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2$  se tiene que  $V(\mathbf{x}) \geq V(\mathbf{x}, t)$ ; es decir,  $V(\mathbf{x}, t)$  es dominada por  $V(\mathbf{x})$  y por tanto  $V(\mathbf{x}, t)$  es decreciente  $\Rightarrow$  se cumple la condición 3.

Condición 4: dado que  $V(\mathbf{x}, t)$  no es acotada  $\Rightarrow$  se cumple la condición 4.

Por lo tanto, el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable. ♣

En sistemas autónomos bastaba con tener  $V(\mathbf{x}, t)$  definida positiva y  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  definida negativa para asegurar la estabilidad asintótica del origen. En sistemas no-autónomos debe cumplirse además que  $V$  sea decreciente. Esta característica se observa en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.6.** El sistema dado por  $\dot{x}(t) = \frac{\dot{g}(t)}{g(t)}x(t)$  tiene al origen como punto de equilibrio. Determine la estabilidad de éste para lo cual considere que  $g(t)$  es como ilustrado en la Fig. 3.1(a). **R.:** La función  $g^2(t)$ , Fig. 3.1(b), cumple con  $\int_0^\infty g^2(r)dr < \int_0^\infty e^{-r}dr + \sum_{n=1}^\infty 1/2^n = 2$ . Esto porque el área de la función  $g^2(t)$  es siempre menor que el área de  $e^{-t}$  y de la suma del tren de triangulares. En general, este tren de pulsos debiera cumplir con un ancho menor a  $1/2^n$ , Fig. 3.1(a). Por lo tanto,

Condición 1: la función  $V(x, t) = \frac{x^2}{g^2(t)} \left\{ 3 - \int_0^t g^2(r)dr \right\}$  es definida positiva puesto que domina la función definida positiva tiempo-invariante  $V(\mathbf{x}) = x^2 \Rightarrow$  se cumple condición 1.

Condición 2: al obtener  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{2x}{g^2} \left\{ 3 - \int_0^t g^2(r)dr \right\} \frac{\dot{g}}{g} x - \frac{x^2 2\dot{g}}{g^3} \left\{ 3 - \int_0^t g^2(r)dr \right\} - \frac{x^2}{g^2} g^2 = -x^2$  ó bien  $-\dot{V}(\mathbf{x}, t) = x^2$  se observa que es definida positiva pues domina a la función tiempo-invariante definida positiva  $V(\mathbf{x}) = 0.5x^2$  por lo que  $-\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva o  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es definida negativa  $\Rightarrow$  se cumple la condición 2.

Hasta aquí se cumple que  $V(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva y que  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es definida negativa por lo que se podría pensar que el origen es asintóticamente estable; sin embargo, la solución general de la ecuación diferencial es  $x(t) = \frac{g(t)}{g(t_0)}x(t_0)$ , que es

$x(t) = g(t)$  con  $x(t_0) = g(t_0) = 1$ , Fig. 3.1(b), la cual no es asintóticamente estable puesto que  $g(t)$  toca siempre el 1 a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Esto se puede explicar por la imposibilidad de encontrar una función definida positiva  $V(\mathbf{x})$  que domine a la función  $V(\mathbf{x}, t)$ , dado que la función  $V(\mathbf{x}, t)$  toma valores que tienden a infinito a medida que  $t \rightarrow \infty$ . ♣

Otro interesante ejemplo es la ecuación diferencial de segundo orden dada por,  $\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k_0x = 0$ , en donde se podría pensar que mientras  $c(t)$  sea positiva se tiene un factor de amortiguamiento y la solución debiera tender al origen. Sin embargo, si por ejemplo  $c(t) = 2 + e^t$  y  $k_0 = 1$  entonces la solución es  $x(t) = 1 + e^{-t}$ , la que no converge al origen. Para explicar este caso se revisa el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.7.** El sistema dado por  $\ddot{x} + c(t)\dot{x} + k_0x = 0$  tiene al origen como punto de equilibrio. Determine la estabilidad de éste. **R.:**

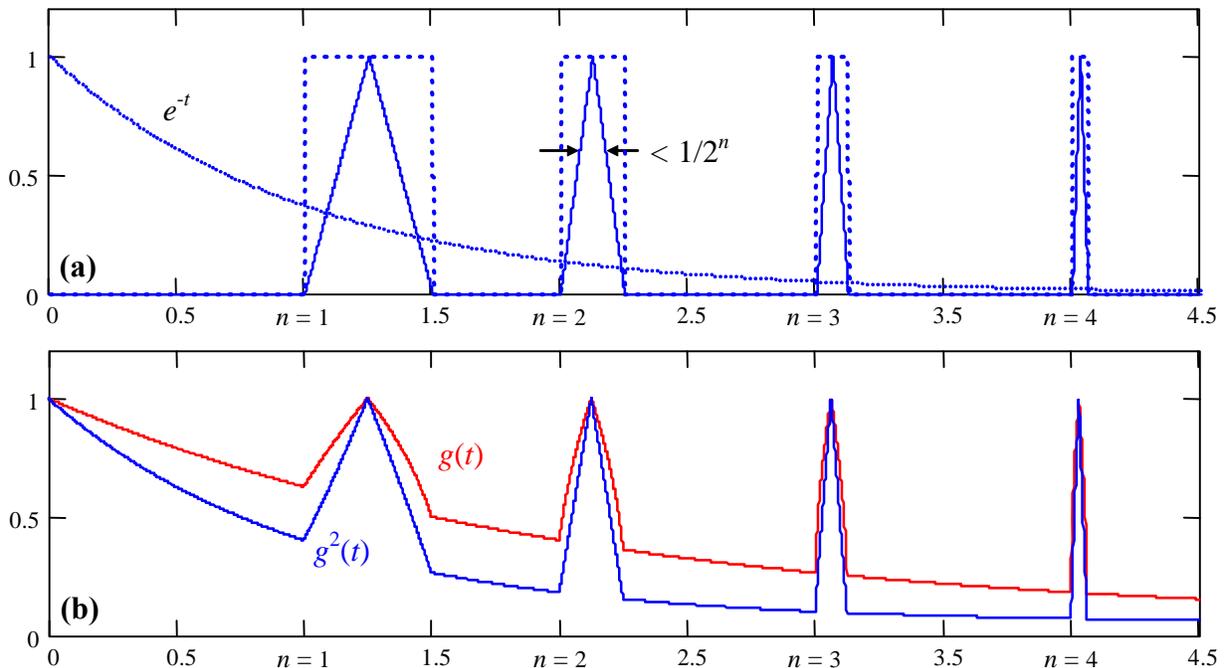
Condición 1: la función  $V(\mathbf{x}, t) = \frac{(\dot{x} + \alpha x)^2}{2} + \frac{b(t)x^2}{2}$  donde  $b(t) = k_0 - \alpha^2 + \alpha c(t)$  y  $\alpha$  es una constante positiva menor que  $\sqrt{k_0}$  para que  $V(\mathbf{x}, t)$  sea definida positiva considerando que domina a la función escalar invariante en el tiempo, por ejemplo, dada por  $V(\mathbf{x}) = \frac{(\dot{x} + \alpha x)^2}{4} + \frac{\min\{b(t)\}x^2}{4} \Rightarrow$  se cumple condición 1.

Condición 2: al obtener  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \{\alpha - c(t)\}\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{2}\{\dot{c}(t) - 2k_0\}x^2$  se tiene que  $-\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \{c(t) - \alpha\}\dot{x}^2 + \frac{\alpha}{2}\{2k_0 - \dot{c}(t)\}x^2$  es definida positiva si  $c(t) > \alpha$  y  $2k_0 > \dot{c}(t)$  por lo que  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es definida negativa  $\Rightarrow$  se cumple la condición 2.

Condición 3: si  $c(t)$  es acotada entonces es posible encontrar una función tiempo-invariante definida positiva  $V(\mathbf{x})$  tal que se cumpla que  $V(\mathbf{x}) \geq V(\mathbf{x}, t)$ ; es decir,  $V(\mathbf{x}, t)$  es dominada por  $V(\mathbf{x})$ , por ejemplo,  $V(\mathbf{x}) = (\dot{x} + \alpha x)^2 + \max\{b(t)\}x^2$ , y por tanto  $V(\mathbf{x}, t)$  es decreciente  $\Rightarrow$  se cumple la condición 3.

En el caso anterior no se cumple que  $c(t)$  sea acotada por lo que no se garantiza que el origen sea asintóticamente estable. Nótese que esta condición es suficiente pero no necesaria; es decir, si  $c(t)$  es acotada entonces se asegura que el origen es asintóticamente estable, caso contrario nada se puede decir. Este es el caso de la ecuación  $\ddot{x} + (2 + 8t)\dot{x} + 5x = 0$ , donde el origen sí es asintóticamente estable aun cuando  $c(t)$  no es acotada. ♣

Al igual que en el caso de sistemas autónomos, la linealización es una herramienta que permite el



**Fig. 3.1** Función de prueba para el Ejemplo 3.6. (a) funciones auxiliares; (b)  $g(t)$  y  $g^2(t)$ .

análisis en sistemas no-autónomos.

## B. Análisis de Lyapunov de Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo.

En el caso de sistemas lineales se tiene que si la matriz  $\mathbf{A}$  de la ecuación de estados  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  tiene todos sus valores propios estables, entonces el origen es asintóticamente estable. Desafortunadamente en sistemas lineales variantes esto no es verdad. Es decir, si en el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  la matriz  $\mathbf{A}(t)$  tiene todos sus valores propios estables nada se puede concluir respecto de la estabilidad del origen.

**Ejemplo 3.8.** Estudie la estabilidad del sistema dado por  $\dot{x}_1 = -x_1 + e^{2t}x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_2$ . **R.:** El sistema tiene una matriz

$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  y sus valores propios son  $\lambda_{1,2} = -1$ , ambos estables; sin embargo, la solución al problema es

$x_2 = x_2(0)e^{-t}$  y  $\dot{x}_1 + x_1 = x_2(0)e^t$ , donde claramente si  $x_2(0) \neq 0$  entonces  $x_1$  diverge. ♣

Por otro lado, el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  es asintóticamente estable si los valores propios de la matriz simétrica  $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$  (los cuales son todos números reales) permanecen siempre en el lado izquierdo del plano complejo. Es decir,  $\exists \lambda > 0, \forall i, \forall t \geq 0$  tal que,  $\lambda_i(\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T) < -\lambda$ . Esto se puede demostrar usando Lyapunov con  $V = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$ , puesto que  $\dot{V} = \mathbf{x}^T\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T)\mathbf{x} \leq -\lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x} = -\lambda V$ , de manera que  $\forall t > 0, 0 \leq \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 = V(t) \leq V(0)e^{-\lambda t}$  y por lo tanto  $\mathbf{x}$  tiende a cero exponencialmente con una razón de a lo menos  $\lambda/2$ .

Es importante destacar que en el caso anterior se tiene una condición suficiente, por lo que si no se cumple que los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$  son estables, nada se puede decir de la estabilidad del origen.

Un par de casos especiales de sistemas lineales variantes son los siguientes.

**Sistemas lineales perturbados.** Sea  $\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2(t)\}\mathbf{x}$  donde  $\mathbf{A}_1$  es constante y Hurwitz (todos sus valores propios son estrictamente estables) y  $\mathbf{A}_2(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\int_0^\infty \|\mathbf{A}_2(t)\| dt < \infty$  entonces el sistema es global exponencialmente estable.

**Condición de suavidad suficiente para  $\mathbf{A}(t)$ .** Si el sistema dado por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  es tal que  $\forall t \geq 0$  los valores propios de  $\mathbf{A}(t)$  tiene parte real negativa  $\exists \alpha > 0, \forall i, \forall t \geq 0$  tal que,  $\Re\{\lambda_i(\mathbf{A}(t))\} < -\alpha$  y si en adición la matriz  $\mathbf{A}(t)$  permanece acotada y  $\int_0^\infty \mathbf{A}^T(t)\mathbf{A}(t)dt < \infty$  entonces el sistema es global exponencialmente estable.

## C. El Método de Linealización para Sistemas No-autónomos

En el caso de los sistemas autónomos se tenía la opción de linealización para analizar la estabilidad. En el caso en que se encontraran valores propios en el eje imaginario nada se podía concluir respecto de la estabilidad. Un aspecto importante es que la representación lineal de sistemas autónomos es siempre invariante en el tiempo. Este no es el caso de sistemas no-autónomos en donde la representación lineal es en general variante en el tiempo.

Sea el caso general no-lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}_{h.o.t.}(\mathbf{x}, t)$  donde  $\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0}$ , si se cumple que:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \left\{ \sup \left( \frac{\|\mathbf{f}_{h.o.t.}(\mathbf{x}, t)\|}{\|\mathbf{x}\|} \right) \right\} = 0 \quad \forall t \geq 0, \tag{3.1}$$

entonces  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  es la linealización del sistema no-autónomo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  en torno al origen. La condición (3.1) es equivalente a asegurar la convergencia uniforme que permite afirmar que los términos de orden superior efectivamente no aportan una cantidad relevante aún cuando el tiempo tienda a infinito. Esta condición se puede reemplazar por,

$$\left\| \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} - \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_2} \right\|_2 \leq L \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 \quad \forall i, \forall t \geq 0,$$

donde  $L$  es un escalar finito. Esta última condición se conoce como la condición de Lipschitz.

**Ejemplo 3.9.** El sistema dado por  $\dot{x} = -x + tx^2$  tiene por linealización a  $\dot{x} = -x$ , determine si ésta es válida. **R.:**

$f(x, t) = -x + tx^2$  por lo que  $\frac{\partial f}{\partial x} = -1 + t2x$  y por tanto,  $\left\| \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1} - \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_2} \right\|_2 = \left| \frac{df(x, t)}{dx} \Big|_{x=x_1} - \frac{df(x, t)}{dx} \Big|_{x=x_2} \right| = |-1 + 2tx_1 - (-1 + 2tx_2)| \leq L |x_1 - x_2|$ , de donde  $2t|x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|$ , por lo que  $2t \leq L$ . Desafortunadamente, no se puede encontrar  $L$  finito que satisfaga este resultado  $\forall t \geq 0$ , en particular para  $t \rightarrow \infty$ . En conclusión, no se puede obtener una linealización que represente el sistema no-lineal original. ♣

Los resultados anteriores son utilizados de base para los siguientes teoremas.

**Teorema:** Si el sistema linealizado es uniformemente asintóticamente estable, entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  del sistema original no-autónomo es también uniformemente asintóticamente estable.

**Teorema:** Si el Jacobiano  $\mathbf{A}(t)$  es constante y si la condición de convergencia uniforme se cumple, entonces la inestabilidad del sistema linealizado implica que el sistema original no-lineal no-autónomo es inestable.

Nótese que el caso de la linealización requiere de la convergencia uniforme y no cubre el caso de inestabilidad si el Jacobiano es variante en el tiempo.

### 3.3 Teoremas para la Inestabilidad.

Los teoremas anteriores sirven para probar la estabilidad de los sistemas. En el caso que las condiciones no se cumplan, nada se puede decir. Este es también el caso cuando los métodos de linealización arrojan sólo estabilidad marginal. Los siguientes teoremas son útiles para establecer la inestabilidad de sistemas.

**Teorema: "Primer teorema":** Si en una vecindad  $\Omega$  del origen, existe función escalar decreciente continua diferenciable  $V(\mathbf{x}, t)$  tal que,

- $V(\mathbf{0}, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0,$

- $V(\mathbf{x}, t_0)$  puede asumir valores positivos arbitrariamente cerca del origen,
  - $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es definida positiva (localmente en  $\Omega$ ),
- entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  al instante  $t_0$  es inestable.

**Ejemplo 3.10.** El sistema dado por  $\dot{x}_1 = 2x_2 + x_1(x_1^2 + 2x_2^4)$ ,  $\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4)$  tiene por punto de equilibrio al origen, determine su estabilidad. **R.:** La linealización resulta ser  $\dot{x}_1 = 2x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -2x_1$  cuyos valores propios son  $\pm 2j$ , por lo que nada se puede decir del origen como punto de equilibrio. Si se considera  $V = 1/2(x_1^2 + x_2^2)$  se obtiene que  $\dot{V} = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^4)$  que es definida positiva por lo tanto el origen es inestable. ♣

**Teorema: "Segundo teorema":** Si en una vecindad  $\Omega$  del origen, existe una función escalar decreciente continua diferenciable  $V(\mathbf{x}, t)$  tal que,

- $V(\mathbf{0}, t) = 0$  y  $V(\mathbf{x}, t_0)$  puede asumir valores positivos arbitrariamente cerca del origen,
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t) - \lambda V(\mathbf{x}, t) \geq 0, \forall t \geq t_0, \forall \mathbf{x} \in \Omega,$

con  $\lambda$  una constante positiva, entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  al instante  $t_0$  es inestable.

**Ejemplo 3.11.** El sistema dado por  $\dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 \sin^2 x_2 + 5x_1 x_2^2 \sin^2 x_1$ ,  $\dot{x}_2 = 3x_1 \sin^2 x_2 + x_2 - 5x_1^2 x_2 \cos^2 x_1$  tiene por punto de equilibrio al origen, determine su estabilidad. **R.:** Al considerar  $V = 1/2(x_1^2 - x_2^2)$  que asume valores positivos cerca del origen en la línea  $x_2 = 0$ , se obtiene que  $\dot{V} = 2V + 5x_1^2 x_2^2$  ó  $\dot{V} - 2V = 5x_1^2 x_2^2$  cumpliéndose así las condiciones del segundo teorema por lo que el origen es inestable. ♣

**Teorema: "Tercer teorema":** Sea  $\Omega$  una vecindad del origen, si existe una función escalar  $V(\mathbf{x}, t)$  con primera deriva parcial continua, decreciente en  $\Omega$ , y en una región  $\Omega_1$  en  $\Omega$  tal que,

- $V(\mathbf{x}, t)$  y  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  son definidas positivas en  $\Omega_1$ ,
- el origen esta en el contorno de  $\Omega_1$ ,
- en el contorno de  $\Omega_1$  dentro de  $\Omega$ ,  $V(\mathbf{x}, t) = 0 \forall t \geq t_0$ ,

entonces el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  al instante  $t_0$  es inestable.

### 3.4 Análisis usando Lema de Barbalat

En sistemas autónomos si  $V$  es definido positivo y  $\dot{V}$  es definido negativo, entonces el origen es asintóticamente estable, si  $\dot{V}$  es sólo semi-definido negativo entonces la teoría de conjuntos invariantes permite evaluar esta característica. En el caso de sistemas no-autónomos se tiene equivalentemente el Lema de Barbalat.

## A . Propiedades asintóticas de funciones y sus derivadas

**Caso 1.** Si  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  no implica que  $f$  converge cuando  $t \rightarrow \infty$ . Este es el caso de  $f(t) = \sin(\log(t))$ , donde  $\dot{f}(t) = \cos(\log(t))/t$  que tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ ; sin embargo,  $f$  no converge.

**Caso 2.** Si  $f$  converge no implica que  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Este es el caso de  $f(t) = e^{-t}\sin(e^{2t})$  que tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ ; sin embargo,  $\dot{f}(t) = -e^{-t}\sin(e^{2t}) + e^{-t}\cos(e^{2t})2e^{2t} = -e^{-t}\sin(e^{2t}) + 2e^t\cos(e^{2t})$  no es acotada.

**Caso 3.** Si  $f$  es acotada inferiormente y decreciente ( $\dot{f}(t) \leq 0$ ) entonces  $f$  converge a un límite.

## B . Lema de Barbalat

Es de interés el Caso 2 donde si  $f$  converge qué restricción adicional debe imponerse en  $\dot{f}(t)$  para que  $\dot{f}(t)$  tienda a cero. El Lema de Barbalat aporta la respuesta.

**Teorema:** Si una función diferenciable  $f(t)$  tiene un límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\dot{f}(t)$  es uniformemente continua, entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Notar que,

Una función  $g(t)$  es continua en  $[0, \infty)$  si :

$$\forall t_1 \geq 0, \forall R > 0, \exists \eta(R, t_1) > 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R$$

Una función  $g(t)$  es uniformemente continua en  $[0, \infty)$  si :

$$\forall R > 0, \exists \eta(R) > 0, \forall t_1 \geq 0, \forall t \geq 0, |t - t_1| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_1)| < R$$

Una alternativa es que una función es uniformemente continua si la derivada de la función es continua.

**Corolario:** Si la función diferenciable  $f(t)$  tiene límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$ , y es tal que  $\ddot{f}(t)$  existe y es acotada, entonces  $\dot{f}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por lo que finalmente el Lema de Barbalat es,

**Lema:** Si una función  $V(\mathbf{x}, t)$  satisface,

- $V(\mathbf{x}, t)$  es acotada inferiormente,
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es semi-definida negativa,
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  es uniformemente continua en el tiempo,

entonces  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Este lema implica que  $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow V_\infty$  tal que  $V_\infty \leq V(\mathbf{x}(0), 0)$ .

---

**Ejemplo 3.12.** El sistema dado por  $\dot{e} = -e + \theta\varpi(t)$ ,  $\dot{\theta} = -e\varpi(t)$  tiene por punto de equilibrio al origen, determine su estabilidad si  $\varpi(t)$  es desconocido pero acotado. **R.:** Al considerar  $V = e^2 + \theta^2$  se tiene que  $\dot{V} = -2e^2$  lo que implica que  $V(t) \leq V(0)$  y por tanto  $e$  y  $\theta$  son acotados. Sin embargo,  $\dot{V}$  es sólo semi-definida negativa y como el sistema es no-autónomo no se puede utilizar el teorema de los conjuntos invariantes. Para aplicar el lema de Barbalat se debe chequear la continuidad uniforme de  $\dot{V}$  para lo cual se obtiene  $\ddot{V} = -4e(-e + \theta\varpi(t))$  que es acotado dado que  $e$ ,  $\theta$  y  $\varpi$  lo son por lo que  $\dot{V}$  es uniformemente continuo. Por lo tanto,  $\dot{V} = -2e^2 \rightarrow 0$  por lo que  $e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . ♣

---



## 4 Análisis Utilizando Funciones Descriptoras.

Los ciclos límites aparecen en sistemas de toda naturaleza ya sea en forma natural y/o inducida. Los más conocidos son los debidos a histéresis, zonas muertas y controles on-off que a su vez obedecen a no-linealidades duras. El tratamiento de éstos se facilita al utilizar el concepto de *función descriptora*, el cual aparece como una extensión natural del análisis en frecuencia realizado en sistemas lineales a sistemas no-lineales, en particular a aquellos caracterizados por no-linealidades duras. Es más, el Criterio de Nyquist es también extendido a estos casos para facilitar el análisis de estabilidad.

### 4.1 Introducción.

La F.D. es una extensión natural del método de análisis en frecuencia utilizado en sistemas lineales. Sus mayores limitaciones son que es un método aproximado y sirve esencialmente en sistemas en donde hay presunción de la presencia de ciclos límites.

#### A . Ejemplo: Ecuación de Van der Pol.

Sea el sistema descrito por la ecuación no-lineal de segundo orden,

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

lo que se puede escribir como,

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + x = -\alpha\dot{x}^2.$$

Si se define a  $u$  como  $-\alpha\dot{x}^2 = u\alpha$ , entonces se tiene una ecuación lineal por lo que se utiliza Laplace para su análisis, quedando,

$$\frac{x}{u} = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha s + 1},$$

y una no-lineal dada por,

$$u = -\dot{x}^2.$$

Ambas partes pueden ser representadas como ilustrado en la Fig. 4.1(a). Si se asume que el sistema está oscilando permanentemente se tiene que  $x = A\sin(\omega t)$  por lo que  $\dot{x} = A\omega\cos(\omega t)$ . Al reemplazar esta expresión en la definición de  $u$  se tiene que  $u = -\dot{x}^2$  queda como,

$$\begin{aligned} u &= -A^2 \sin^2(\omega t) A\omega \cos(\omega t) \\ &= -\frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \cos(\omega t), \\ &= -\frac{A^3 \omega}{4} (\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)) \end{aligned}$$

de donde  $u$  tiene un tercer armónico. Si el bloque lineal es un *pasa bajos*, entonces el tercer armónico se puede eliminar, así  $u$  queda:

$$u \cong -\frac{A^3 \omega}{4} \cos(\omega t) = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} (-A \operatorname{sen}(\omega t)) = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} (-x).$$

Esto implica que el bloque no-lineal puede ser aproximado por un bloque lineal cuya ganancia depende de  $A$  Fig. 4.1(b). Por lo tanto, la entrada ( $-x$ ) y salida ( $u$ ) del bloque no-lineal pueden relacionarse por,

$$u = N(A, \omega)(-x),$$

donde  $N(A, \omega) = \frac{A^2}{4}(j\omega)$  para el caso del oscilador de Van der Pol. Esta función que depende de la amplitud de la señal de entrada y de la frecuencia se conoce como *función descriptora*. Para obtener la amplitud y frecuencia de la oscilación se procede a considerar el diagrama de la Fig. 4.1(b).

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t) = \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} \frac{A^2}{4} j\omega (-A \operatorname{sen}(\omega t)),$$

de donde se obtiene la ecuación,

$$-1 = \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha(j\omega) + 1} \frac{A^2}{4} j\omega.$$

La solución de esta ecuación compleja (parte real y parte imaginaria) es  $\omega = 1$  y  $A = 2$ , cuyos valores no dependen de  $\alpha$ . Es decir, el sistema tiene una oscilación con una amplitud de  $A = 2$  a una frecuencia angular de  $\omega = 1$ , independiente de  $\alpha$ .

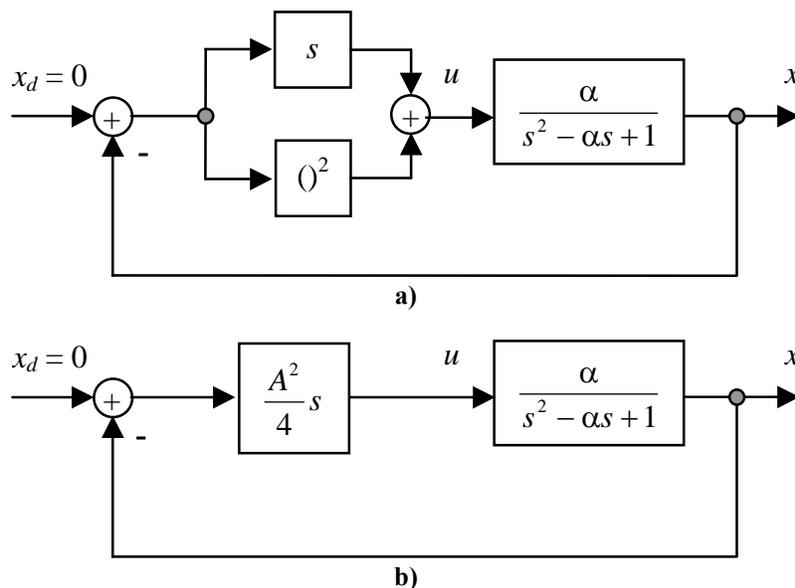


Fig. 4.1 Oscilador de Van der Pol; a) diagrama equivalente, b) diagrama equivalente con F.D..

Para analizar la estabilidad del ciclo límite, se puede obtener la ecuación característica (asumiendo que  $A$  es constante) a partir de la Fig. 4.1(b), que es:

$$1 + \frac{A^2}{4} s \frac{\alpha}{s^2 - \alpha s + 1} = 0,$$

cuyos valores propios son,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{8}\alpha(A^2 - 2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{64}\alpha^2(A^2 - 2^2)^2 - 1},$$

de donde se aprecia que si  $A < 2$  se tiene que  $\lambda_{1,2}$  tienen parte real positiva, por lo que el sistema diverge y por lo tanto la oscilación crece en amplitud, y si  $A > 2$  se tiene que  $\lambda_{1,2}$  tienen parte real

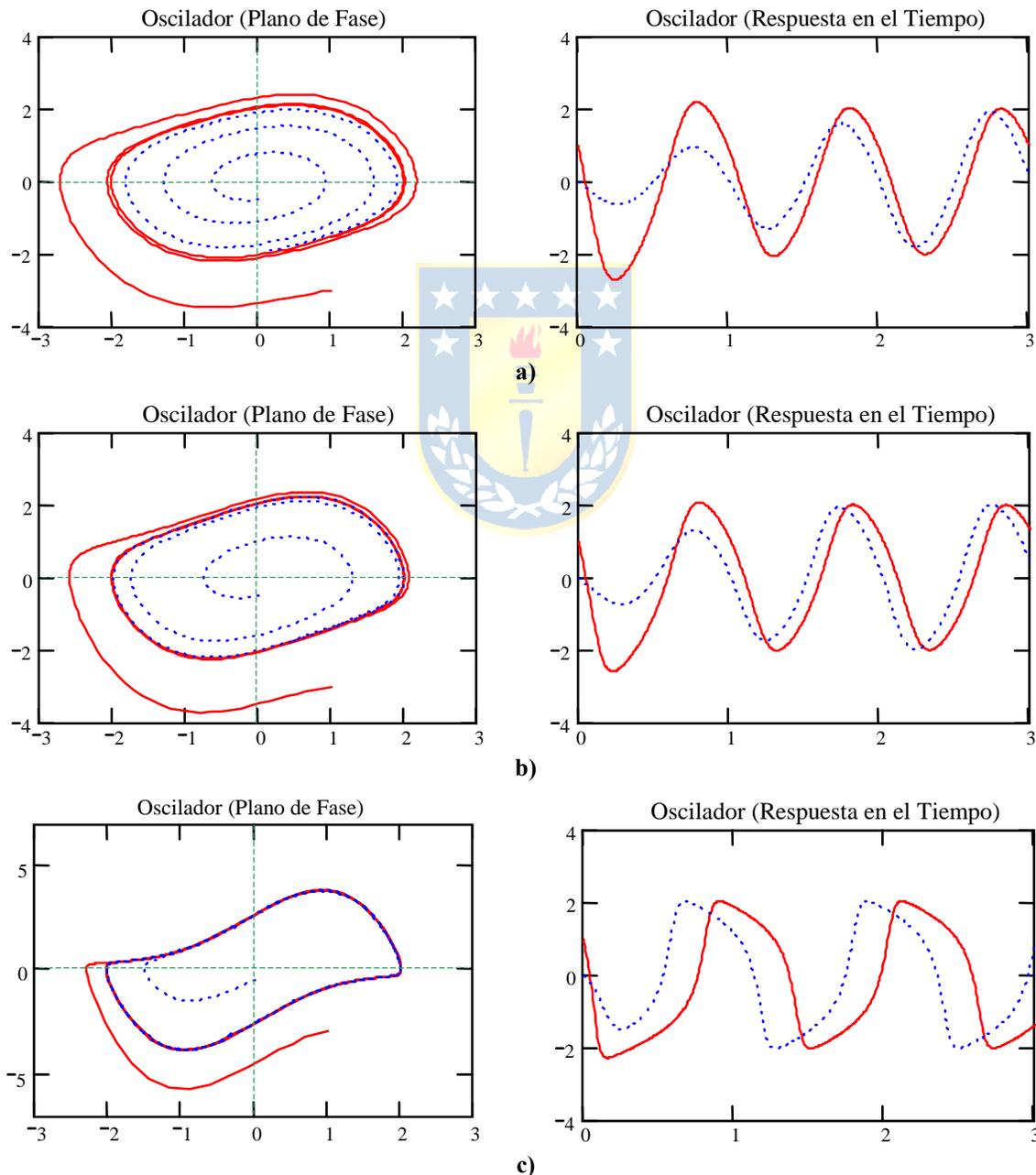


Fig. 4.2 Simulaciones para el oscilador de Van der Pol; a)  $\alpha = 0.3$ , b)  $\alpha = 0.5$ , c)  $\alpha = 2$ .

negativa, por lo que el sistema tiende a converger y por lo tanto la oscilación decrece en amplitud. Por lo tanto, para  $A = 2$  se espera un ciclo límite.

La Fig. 4.2 muestra simulaciones para  $\alpha = 0.3, 0.5$  y  $2$ . Los resultados muestran que  $\alpha$  modifica los resultados pero el análisis anterior no lo acusa. Específicamente, se encuentra que para valores pequeños de  $\alpha$ , los resultados esperados se acercan al caso real.

**B. Dominio de Aplicaciones y Simplificaciones.**

La utilización de funciones descriptoras es limitado y para su utilización se deben considerar simplificaciones a los sistemas. La limitación fundamental es que los sistemas a analizar estén contenidos en esquemas como el ilustrado en la Fig. 4.3(a). Las restricciones y simplificaciones son las siguientes.

- i) Sólo hay una no-linealidad. En el caso de coexistir varias, se deberán reducir a una sola o simplemente considerar la más relevante.
- ii) El componente no-lineal debe ser invariante en el tiempo. Afortunadamente la mayoría de los sistemas que generan ciclos límites son autónomos. En estos casos se puede utilizar el Criterio de Nyquist Extendido.
- iii) Se considera sólo una salida sinusoidal. Esto es posible si el bloque lineal de la Fig. 4.3(a) es un pasa bajos lo que ocurre en la mayoría de los sistemas físicos.
- iv) La no-linealidad es impar. Esta restricción es sólo para simplificar el análisis y específicamente permite no considerar términos dc.

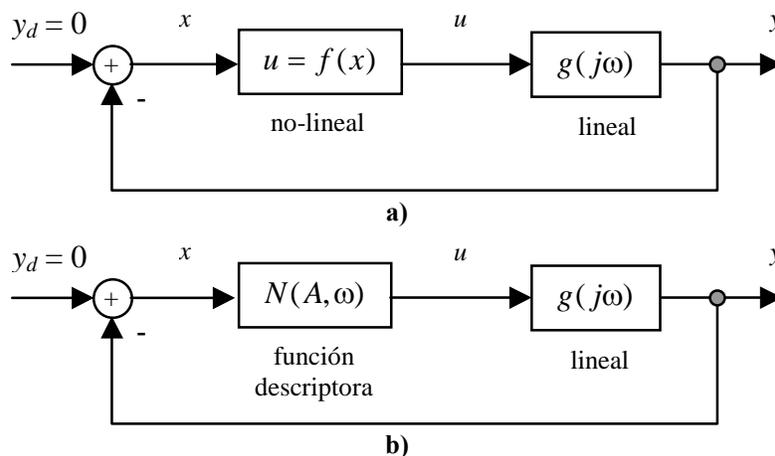
**C. Definiciones Básicas.**

Sea  $x(t) = A \sin(\omega t)$  la entrada y sea  $u(t)$  la salida del bloque no-lineal, por lo tanto,

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t),$$

donde,  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) d\omega t = 0$ ,  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) d\omega t$ ,  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin(n\omega t) d\omega t$ .

Si se considera sólo la primera componente de la salida  $u$ , se tiene que,  $u(t) \cong u_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = M \sin(\omega t + \phi)$ , donde,  $M = M(A, \omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$  y  $\phi = \phi(A, \omega) = \text{tg}^{-1}(a_1/b_1)$ . En notación compleja se tiene que la salida es  $u_1 = M e^{j(\omega t + \phi)} = (b_1 + ja_1) e^{j\omega t}$ . Similarmente al concepto de respuesta



**Fig. 4.3** Esquema para funciones descriptoras; a) diagrama general, b) diagrama utilizando F.D..

en frecuencia de la F. de T. (que es la razón de la entrada y la salida) se define la *función descriptora*  $N(A, \omega)$  del elemento no-lineal como el cociente entre la componente fundamental de la salida y la entrada sinusoidal como ilustrado en la Fig. 4.3(b). Es decir,

$$N(A, \omega) = \frac{M e^{j(\omega t + \phi)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\phi} = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1)$$

Claramente, la F.D. depende de la entrada y además es claro que es una función compleja. Es decir, para graficarla se pueden utilizar dos ejes independientes como son la frecuencia y la amplitud de la señal de entrada. En el caso del bloque no-lineal del oscilador de Van der Pol esta función está dada por

$N(A, \omega) = \frac{A^2}{4} (j\omega)$ , es claro que depende de la frecuencia y amplitud de la entrada, además resulta ser un número complejo puro.

### D. Cálculo de Funciones Descriptoras.

El cálculo puede ser analítico, numérico, o experimental. En este curso se optará por analizar los casos donde se pueden obtener en forma analítica como en el siguiente ejemplo.

---

**Ejemplo 4.1.** Sea el bloque no-lineal descrito por  $u(t) = x(t) + x^3(t)/3$ , determine su F.D.. **R.:** Se asume una entrada  $x(t) = A \text{sen}(\omega t)$  por lo que  $u(t) = A \text{sen}(\omega t) + (A \text{sen}(\omega t))^3 / 3$ ,  $a_1 = 0$ , y  $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{A \text{sen}(\omega t) + (A \text{sen}(\omega t))^3 / 3\} \text{sen}(\omega t) d\omega t = A + 3/8A^3$ . Así,  $u_1(t) = (A + 3/8A^3) \text{sen}(\omega t)$ , por lo que finalmente  $N(A, \omega) = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1) = \frac{A + 3/8A^3}{A} = 1 + 3/8A^2$ . ♣

---

## 4.2 No-linealidades Comunes y sus Funciones Descriptoras.

A continuación se obtienen las funciones descriptoras de los elementos no-lineales más comunes en la

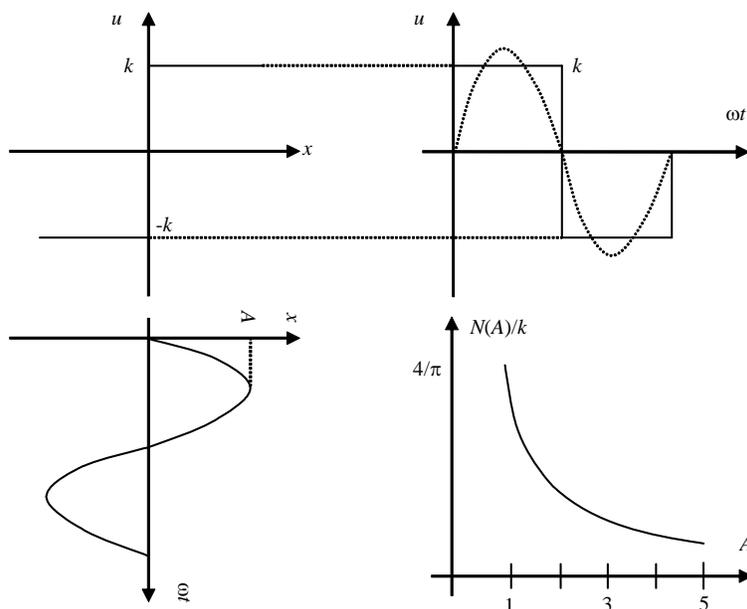


Fig. 4.4 F.D. del bloque no-lineal on-off.

variadas disciplinas de la ingeniería.

**A. Saturación, Fig. 4.5.**

Si  $A \leq a \Rightarrow u = kA \text{sen}(\omega t)$ . Por lo tanto,  $N(A, \omega) = k$ . Por otro lado, Si  $A > a \Rightarrow$

$$u = \begin{cases} kA \text{sen}(\omega t) & 0 \leq \omega t \leq \gamma \\ ka & \gamma \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases}, \text{ donde } \gamma = \text{asen}(a/A), \text{ por lo que } a_1 = 0 \text{ y } b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(t) \text{sen}(\omega t) d(\omega t) =$$

$$\frac{2kA}{\pi} \left\{ \gamma + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right\}. \text{ Por lo tanto, } N(A, \omega) = N(A) = \frac{2k}{\pi} \left\{ a \text{sen}\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right\}. \text{ Notar que } N(A) \text{ es}$$

real y no depende de la frecuencia entonces se puede concluir que este bloque no-lineal no introduce desfase y tiene una respuesta en frecuencia plana.

**B. Control On-Off, Fig. 4.4.**

En este caso se tiene que  $a_1 = 0$  y  $b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} k \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{4k}{\pi}$ . Por lo tanto,  $N(A, \omega) = N(A) = \frac{4k}{A\pi}$ .

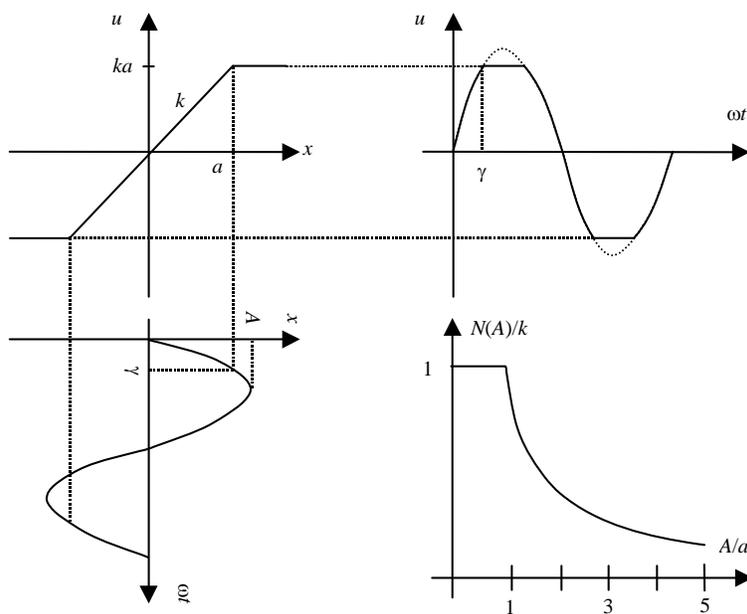
Al igual que el bloque de saturación,  $N(A)$  es real y no depende de la frecuencia, entonces se puede concluir que este bloque no-lineal no introduce desfase y tiene una respuesta en frecuencia plana.

**C. Zona Muerta, Fig. 4.6(a).**

Si  $A \leq b \Rightarrow u = 0$ . Por lo tanto,  $N(A, \omega) = 0$ . Por otro lado, Si  $A > b \Rightarrow$

$$u = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega t \leq \gamma \\ k(A \text{sen}(\omega t) - b) & \gamma \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases}, \text{ donde } \gamma = \text{asen}(b/A), \text{ por lo que } a_1 = 0 \text{ y } b_1 =$$

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(t) \text{sen}(\omega t) d(\omega t) = \frac{2kA}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \gamma - \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right\}. \text{ Por lo tanto, } N(A, \omega) = N(A) =$$

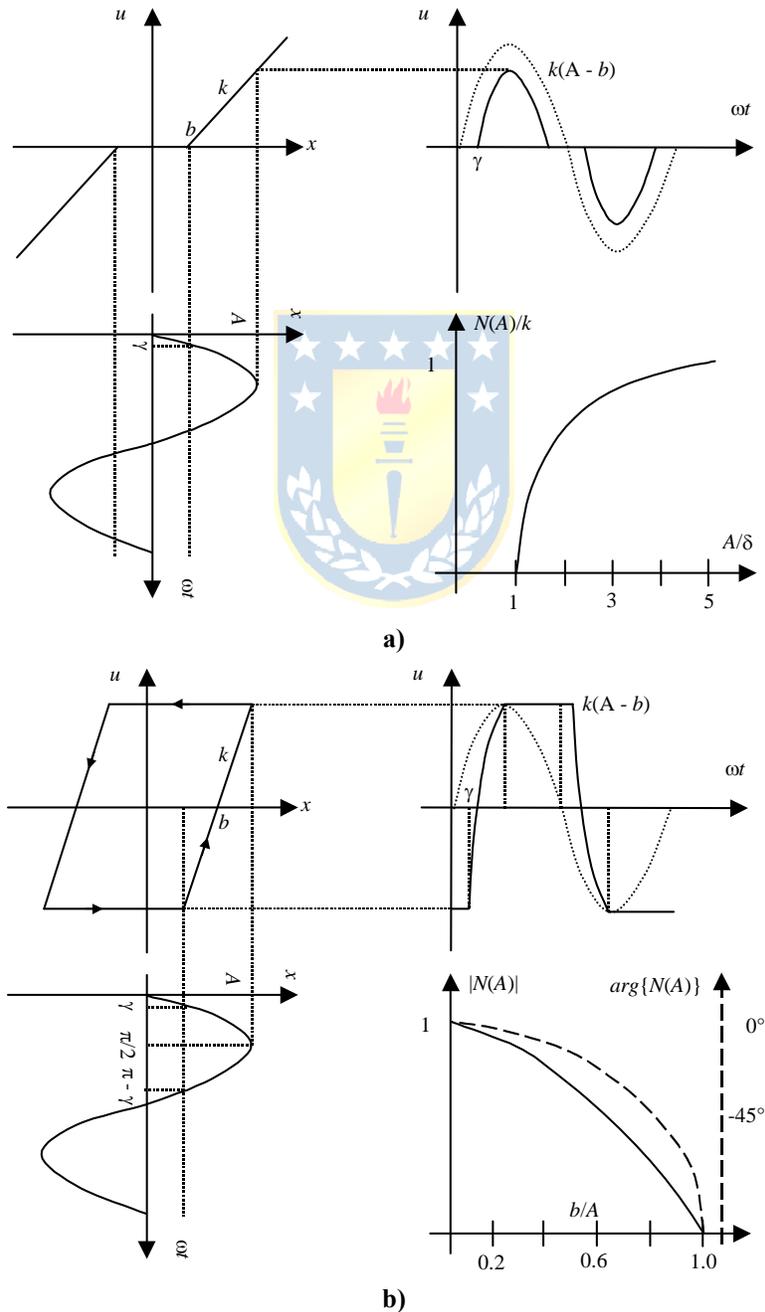


**Fig. 4.5** F.D. del bloque no-lineal saturación.

$$\frac{2k}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - a \operatorname{sen} \left( \frac{b}{A} \right) - \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right\}. \text{ Notar que a medida que } A \text{ aumenta el efecto no-lineal desaparece.}$$

**D. Backslash, Fig. 4.6(b).**

Si  $A \leq b \Rightarrow u = 0$ . Por lo tanto,  $N(A, \omega) = 0$ . Por otro lado, Si  $A > b \Rightarrow$



**Fig. 4.6** F.D. del bloque no-lineal; a) zona muerta, b) backslash.

$$u = \begin{cases} (A-b)k & \pi/2 \leq \omega t \leq \pi - \gamma \\ (A \sin(\omega t) - b)k & \pi - \gamma \leq \omega t \leq 3\pi/2 \\ -(A-b)k & 3\pi/2 \leq \omega t \leq 2\pi - \gamma \\ (A \sin(\omega t) - b)k & 2\pi - \gamma < \omega t \leq 5\pi/2 \end{cases}, \text{ donde } \gamma = \arcsin(1-2b/A), \text{ por lo que } a_1 = \frac{4kb}{\pi} \left\{ \frac{b}{A} - 1 \right\} \text{ y}$$

$$b_1 = \frac{Ak}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - a \operatorname{sen} \left\{ \frac{2b}{A} - 1 \right\} - \left\{ \frac{2b}{A} - 1 \right\} \sqrt{1 - \left\{ \frac{2b}{A} - 1 \right\}^2} \right\}. \text{ Por lo tanto, } |N(A, \omega)| = |N(A)| = \frac{1}{A} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

y  $\arg\{N(A, \omega)\} = \arg\{N(A)\} = \operatorname{atan}(a_1/b_1)$ . Notar que si  $A$  aumenta el efecto no-lineal finalmente desaparece. En este caso hay un desfase entre la entrada y la salida que debiera ir en desmedro de la estabilidad del sistema.

### 4.3 Análisis de Sistemas utilizando Funciones Descriptoras.

Primero se obtiene la función descriptora del bloque no-lineal, luego se debe concluir respecto de la existencia de ciclos límites y finalmente respecto de la estabilidad de éstos. Para estos efectos se debe extender el Criterio de Nyquist a este tipo de sistemas, comenzando por una revisión del Criterio de Nyquist para sistemas SISO.

#### A. Criterio de Nyquist Extendido.

Para el sistema SISO ilustrado en la Fig. 4.7(a) se tiene una F. de T. en L.C. dada por la expresión:  $h(s) = \frac{k \cdot g(s)}{1 + k \cdot g(s)}$ , de donde se puede ver que los ceros de  $1 + k \cdot g(s)$  son los polos de  $h(s)$ , y demostrar que

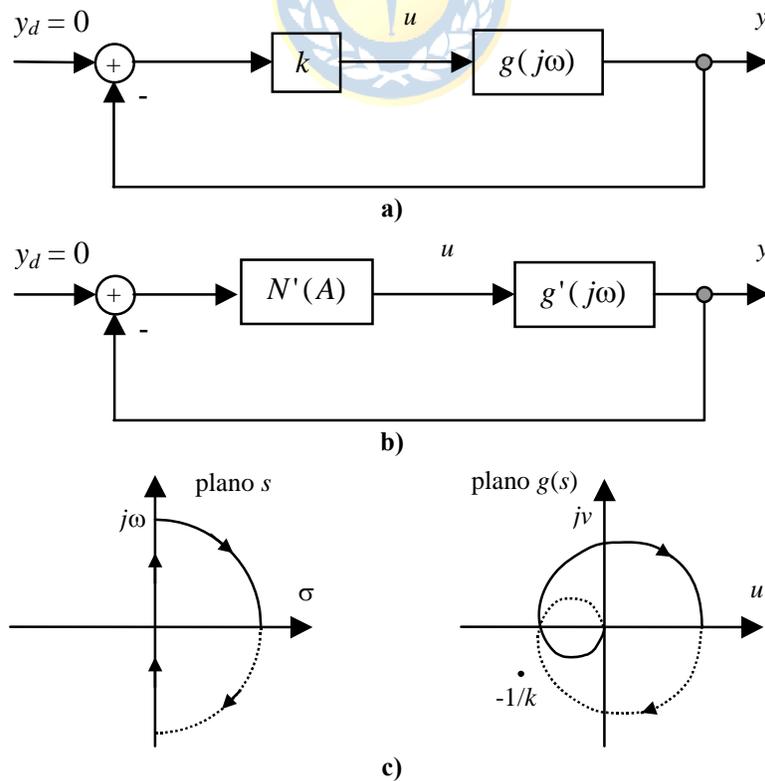


Fig. 4.7 Diagramas para la estabilidad; a) en sistemas SISO, b) en sistemas con F.D., c) Criterio de Nyquist Extendido.

los polos de  $1 + k \cdot g(s)$  son también los polos de  $g(s)$ . Por lo tanto, si se desea tener un sistema estable, la función  $1 + k \cdot g(s)$  no deberá contener ceros en el S.P.D. Por otro lado, el criterio de Nyquist indica que si el contorno de Nyquist  $\gamma$  encierra  $\eta_p$  polos y  $\eta_z$  ceros de la función  $1 + k \cdot g(s)$ , entonces el contorno transformado  $1 + k \cdot g(s)$  encierra  $N = \eta_z - \eta_p$  veces al origen. Por lo tanto, si se desea tener un sistema estable, se debe tener que  $\eta_z = 0$  y por tanto el contorno transformado deberá encerrar el origen  $N = -\eta_p$  veces. Si además se considera que el origen en el contorno transformado  $1 + k \cdot g(s)$  es el punto  $-1/k$ , se puede establecer el Teorema de Nyquist como:

**Teorema:** Si el contorno  $\gamma$  encierra  $\eta_p$  polos de la función  $g(s)$ , entonces el sistema en L.C. es estable si el contorno transformado  $g(s)$  encierra  $N = -\eta_p$  veces al punto  $-1/k$ .

Una de las ventajas de este teorema es que permite deducir la estabilidad para valores arbitrarios de la ganancia  $k$ , al dibujar un único contorno transformado. Para extender el criterio anterior puede considerarse que  $k$  es un número constante que no depende de  $\omega$  y que puede ser complejo Fig. 4.7(c). Si este es el caso, entonces el teorema anterior se conoce como el Teorema de Nyquist Extendido. Por lo tanto, si el sistema dado por la Fig. 4.3(b) se puede transformar en uno como dado por la Fig. 4.7(b), entonces se puede aplicar el Teorema de Nyquist Extendido para determinar la estabilidad del ciclo límite en donde la ganancia  $k = N(A)$  y  $g(j\omega) = g'(j\omega)$  o en aquellos casos en que la función descriptora no depende de  $\omega$  se tiene simplemente que  $k = N(A)$  y  $g(j\omega) = g(j\omega)$ .

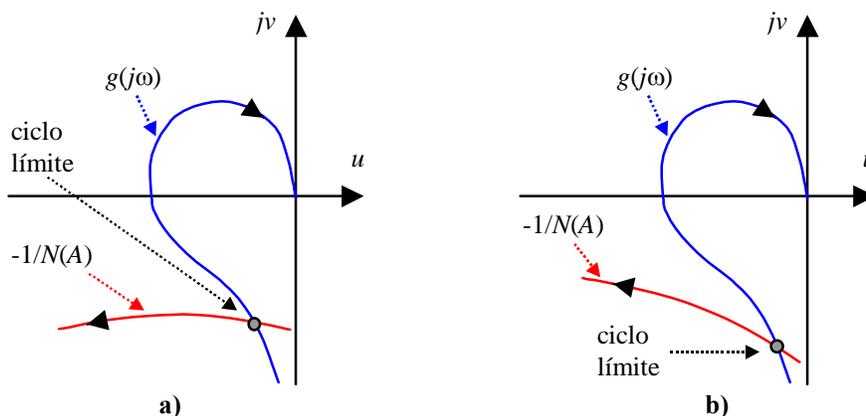
### B. Existencia y Estabilidad de Ciclos Límites.

Atendiendo a la Fig. 4.3(b) se tiene que  $x(t) = -y(t)$ ,  $u = N(A, \omega)x$ , e  $y = g(j\omega)u$ , por lo que el sistema cumple con,

$$g(j\omega) = -\frac{1}{N(A, \omega)}$$

Por lo tanto, si existen ciclos límites, éstos deben satisfacer la expresión anterior. Nótese que la expresión anterior es una ecuación de número complejos y por lo tanto hay dos ecuaciones, una para la parte real y una para la parte imaginaria, de las cuales se puede determinar  $A$  y  $\omega$ .

Gráficamente, en el caso de sistemas que se pueden llevar a la forma ilustrada en Fig. 4.7(b) o en casos en que la F.D. es independiente de  $\omega$ , se puede plotear  $-1/N(A)$  y  $g(j\omega)$  por separado y la intersección de estas curvas define un ciclo límite y la estabilidad se observa del Teorema de Nyquist Extendido. En efecto, si  $g(j\omega)$  no contiene polos inestables, entonces los puntos encerrados por el Nyquist de  $g(j\omega)$



**Fig. 4.8** Ciclo límite estable (las flechas sobre las curvas indican aumento del parámetro  $\omega$  en  $g(j\omega)$  y  $A$  en  $-1/N(A)$ ).

son inestables (la amplitud  $A$  aumenta) y los puntos no encerrados por el Nyquist de  $g(j\omega)$  son estables (la amplitud  $A$  disminuye). Por ejemplo, los casos ilustrados en la Fig. 4.8 muestran ciclos límites estables por cuanto si se considera que  $g(s)$  no contiene polos inestables los puntos encerrados por el Nyquist aumentan  $A$  y los puntos no encerrados disminuyen  $A$ , por lo que las oscilaciones tienden al punto de intersección.

**Ejemplo 4.2.** Sea un sistema como el ilustrado en la Fig. 4.3(b) con un bloque lineal dado por  $g_1(s) = \frac{k_p}{s(s+2)(s+4)}$ , con

$k_p = 122.76$  y un bloque no-lineal tipo zona muerta cuya F.D. es  $N(A) = \frac{2k}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - a \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{A}\right) - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right\}$ , con  $k = 1$  y  $\delta = 20$ .

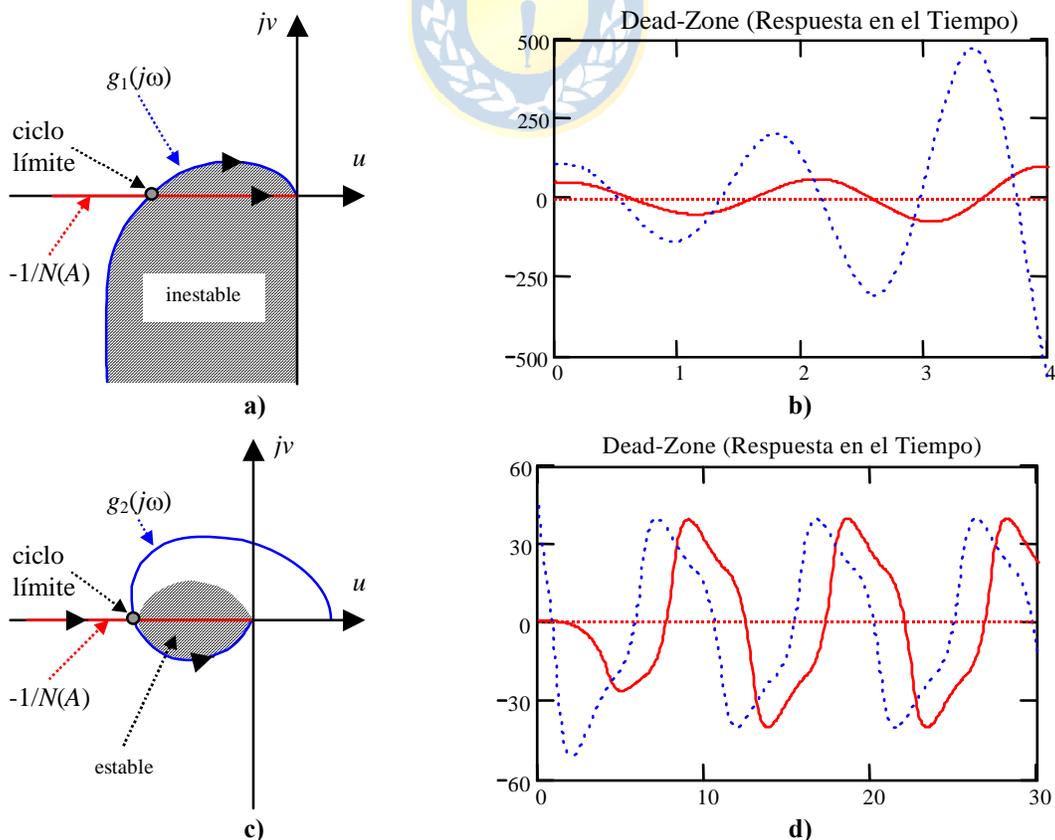
20. Determine los posibles ciclos límites y su estabilidad. **R.:** Al considerar  $g_1(j\omega) = -1/N(A)$  se obtiene la ecuación,

$$\frac{k_p}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+4)} = - \left( \frac{2k}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - a \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{A}\right) - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right\} \right)^{-1},$$

que se puede simplificar a,

$$\frac{-6k_p}{(\omega^2+2^2)(\omega^2+4^2)} + j \frac{k_p(\omega^2-8)}{\omega(\omega^2+2^2)(\omega^2+4^2)} = - \left( \frac{2k}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - a \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{A}\right) - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right\} \right)^{-1},$$

con lo que se obtienen las ecuaciones,



**Fig. 4.9** Ciclo límite de la zona muerta; a) y b) para  $g_1(s)$ , y c) y d) para  $g_2(s)$ .

$$\frac{k_p(\omega^2 - 8)}{\omega(\omega^2 + 2^2)(\omega^2 + 4^2)} = 0,$$

de donde se obtiene que  $\omega = 2\sqrt{2}$  y la ecuación,

$$\frac{-6k_p}{(\omega^2 + 2^2)(\omega^2 + 4^2)} = -\left(\frac{2k}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - a \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{A}\right) - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right\}\right)^{-1},$$

de donde se obtiene que  $A = 40$ . Por lo tanto, de existir un ciclo límite, debería tener esos parámetros. Para analizar la estabilidad se dibuja el Nyquist de  $g_1(j\omega)$  y  $-1/N(A)$ , Fig. 4.9(a). Dado que  $g_1(j\omega)$  no contiene polos inestables los puntos  $-1/N(A)$  que no están rodeados son estables y disminuyen  $A$  por lo que el ciclo límite es inestable como se aprecia en la Fig.

4.9(b). Sin embargo, si la F. de T. del bloque lineal es  $g(s) = k_p \frac{s + 0.25}{(s - 0.5)(s - 0.7)}$ , con  $k_p = 3.0703$  se tiene un Nyquist

como ilustrado en la Fig. 4.9(c) de donde se aprecia un ciclo límite con  $\omega = 0.806$  y  $A = 40$ . La F. de T. tiene dos polos inestables por lo que los puntos  $-1/N(A)$  que están rodeados dos veces en sentido anti-horario son estables. Afortunadamente estos puntos corresponden a una disminución de  $A$  en  $-1/N(A)$  por lo que el ciclo límite es estable como se aprecia en la Fig. 4.9(d). ♣

### C. Confiabilidad del Método.

El método de la F.D. asume que los armónicos de orden superior son filtrados por el bloque lineal. Esto es una aproximación (aun para sistemas lineales con características de pasa bajos) y, por lo tanto, las conclusiones derivadas del análisis pueden ser erróneas. Por ejemplo, (a) la amplitud y frecuencia del ciclo límite pueden ser erróneas, (b) se puede predecir un ciclo límite que no existe, y (c) un ciclo límite existente puede no ser predicho. Para disminuir estos problemas potenciales, se pueden observar dos aspectos:

**Hipótesis de Filtrado:** El método se fundamenta en que el bloque lineal del sistema “filtra” los armónicos de alta frecuencia. Si este no es el caso del sistema lineal, uno de los tres casos de error se puede encontrar.

**Condición Gráfica:** Cuando la gráfica de  $g(j\omega)$  intercepta tangencialmente a la gráfica de  $-1/N(A, \omega)$ , las variaciones de parámetros y la exclusión de los términos de orden superior (armónicas) pueden derivar en conclusiones erróneas. Por el contrario, si la intersección es casi perpendicular, los resultados son más confiables. Este es el caso de la Fig. 4.8(b) en donde la intersección es casi tangencial por lo que la predicción del ciclo límite es incierta.

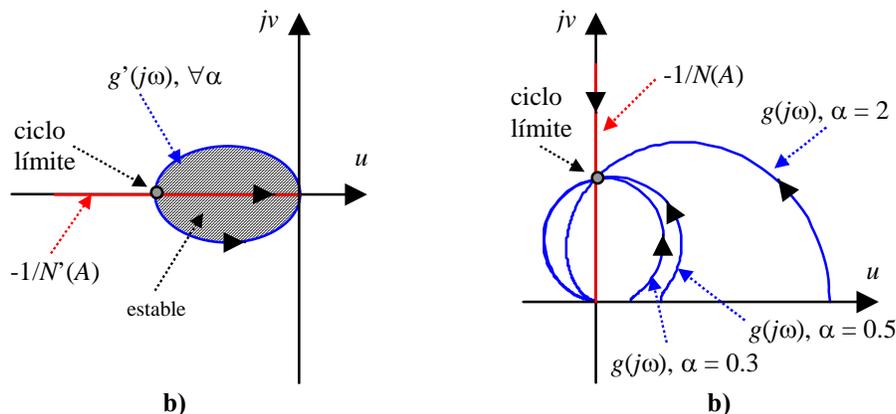


Fig. 4.10 Ciclo límite del oscilador de Van der Pol; a) estabilidad, b) confiabilidad.

**Ejemplo 4.3.** En el caso del oscilador de Van der Pol se tiene que  $g(j\omega) = \frac{\alpha}{(j\omega)^2 - \alpha j\omega + 1}$ , con  $\alpha$  arbitrario y una F.D.

dada por  $N(A, \omega) = \frac{A^2}{4}(j\omega)$ . Determine la estabilidad y confiabilidad del ciclo límite encontrado. **R.:** Para la estabilidad se

obtiene  $g'(j\omega) = \frac{\alpha j\omega}{(j\omega)^2 - \alpha j\omega + 1}$  y  $N'(A) = A^2/4$ , los que se grafican para varios valores de  $\alpha$  en la Fig. 4.10(a). Claramente,

como hay dos polos inestables, el área encerrada dos veces en sentido antihorario corresponde a puntos estables los que hacen disminuir  $A$ , por lo tanto los ciclos límites son estables. Por otro lado, al graficar  $g(j\omega)$  y  $-1/N(A, \omega)$  para varios valores de  $\alpha$ , Fig. 4.10(b), se aprecia que a medida que  $\alpha$  aumenta la intersección es más y más tangencial con lo que el resultado de la predicción se degrada. Esto confirma los resultados ilustrados en la, en donde para  $\alpha = 2$  la frecuencia dista de ser  $\omega = 1$ . ♣



## 5 Control Realimentado.

Los sistemas no-lineales están sometidos a los mismos requerimientos que sistemas lineales. Es decir, se desea obtener determinadas características de regulación y seguimiento, como también inmunidad a cambios de parámetros y variaciones en las perturbaciones. En este capítulo se revisan variadas opciones basadas en técnicas de control lineal que permiten lograr estos objetivos que tiene como factor común la operación bajo estrategias de control realimentadas. Especial énfasis se da a las técnicas de realimentación de variables de estados.

### 5.1 Introducción.

Los objetivos de control son: Estabilización, Seguimiento y Eliminación y/o Atenuación de Perturbaciones. Se pueden agregar objetivos adicionales si se considera la respuesta transiente y las restricciones de las señales de entrada. Finalmente, si se tiene incertidumbre del modelo (parámetros y/o dinámica) se puede recurrir al control robusto y/o adaptivo.

#### A . Estabilización vía Realimentación de Estados.

Si se tiene el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  se puede encontrar una entrada  $\mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{x})$  de manera que el origen sea el punto de equilibrio uniforme asintóticamente estable del sistema en L.C. dado por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \gamma(t, \mathbf{x}))$ . Nótese que en el caso lineal tiempo-invariante se tiene el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ , por lo que se escoge  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_c\mathbf{x}$  con lo que se obtiene el sistema resultante  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K}_c)\mathbf{x}$ , en donde se puede escoger  $\mathbf{K}_c$  para obtener al origen como punto de equilibrio estable. La estabilización también se puede realizar mediante realimentación dinámica, definiendo  $\mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ , donde las variables  $\mathbf{z}$  están dadas por  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ . A esta última técnica corresponde el control integral, en donde se redefinen variables extras para asegurar que el error en estado estacionario sea nulo. Su mayor ventaja es la robustez ante variaciones de parámetros.

#### B . Estabilización vía Realimentación de Salida.

Si se tiene el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$  se puede encontrar una entrada  $\mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{y})$  de manera que el origen sea el punto de equilibrio uniforme asintóticamente estable del sistema en L.C. dado por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \gamma(t, \mathbf{y}))$ . Esto también se puede realizar mediante realimentación dinámica, definiendo  $\mathbf{u} = \gamma(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , donde las variables  $\mathbf{z}$  están dadas por  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ . A esta técnica corresponde el control lineal basado en un observador de estados, donde,  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_c\hat{\mathbf{x}}$ , con  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_o(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{D}\mathbf{u})$ . Su mayor ventaja es la ausencia de mediciones de las variables de estado del sistema.

#### C . Estabilización Global y Local.

Si se tiene el caso  $\dot{x} = x^2 + u$  y se linealiza se tiene  $\dot{x} = u$ , por lo que se puede estabilizar con  $u = -kx$  con  $k > 0$ . El sistema resultante es  $\dot{x} = x^2 - kx$  cuya linealización es  $\dot{x} = -kx$ . Este resultado es una estabilización local. Sin embargo, si se considera una entrada como  $u = -x^2 - kx$  entonces se tiene un sistema resultante  $\dot{x} = -kx$  el cual es estable globalmente.

## D . Seguimiento.

En este caso se tiene el sistema general  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$  con la salida  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ , donde  $\mathbf{p}$  es una perturbación. Si  $\mathbf{y}_d$  es la salida deseada, se desea entonces que  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_d - \mathbf{y} \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para lograr características de seguimiento.

## E . Perturbaciones.

En la presencia de perturbaciones el  $\mathbf{e}(t)$  puede no ser cero; es decir, no se puede lograr seguimiento de salida asintótico. En este caso se puede requerir solamente  $\|\mathbf{e}(t)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq T$ , que es menos restrictivo. En los casos en que  $\mathbf{y}_d$  es una constante, se conoce como referencia y el problema se conoce como de regulación.

## 5.2 Diseño vía Linealización.

Una primera alternativa en sistemas no-lineales es explorar la linealización en estos. En muchos casos esta alternativa da solución satisfactoria a los objetivos de Estabilización y Regulación.

### A . Estabilización.

La estabilización se puede lograr mediante dos alternativas que son vía realimentación de estados y vía realimentación de salida.

**Vía realimentación de estados.** En este caso se tiene el sistema,  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , con  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Para el cual se puede tener la representación lineal dada por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ , donde

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0=0, \mathbf{u}_0=0}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0=0, \mathbf{u}_0=0}$$

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0=0, \mathbf{u}_0=0}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0=0, \mathbf{u}_0=0}$$

por lo que si se utiliza  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ex} - \mathbf{K}_c \mathbf{x}$ , (con  $\mathbf{u}_{ex} = \mathbf{0}$ ) se obtiene que  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K}_c)\mathbf{x}$ . Si la matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)$  es Hurwitz, entonces el origen es asintóticamente exponencialmente estable. Una función de Lyapunov sería  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$  con  $\mathbf{P}$  siendo la solución de  $\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_c)^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ . Nótese que bajo este esquema se tiene un sistema resultante no-lineal dado por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, -\mathbf{K}_c \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, -\mathbf{K}_c \mathbf{x})$ , el cual puede tener características generales distintas a las del sistema no-lineal original, en particular al alejarse del origen. Una de estas características es su estabilidad; para estudiarla, se linealiza en torno a un punto de equilibrio arbitrario para obtener su matriz  $\mathcal{A}$  equivalente que resulta ser,

$$\mathcal{A}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, -\mathbf{K}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \left\{ \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right\} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} - \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \mathbf{K}_c$$

donde,

$$\mathbf{A}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \quad \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}.$$

Por lo tanto, para los valores de  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  tal que la matriz  $\mathcal{A}$  es Hurwitz, Lyapunov asegura que esos puntos de operación son estables. Nótese que el origen lo es puesto que la matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_c)$  se escoge Hurwitz por diseño. Es decir,  $\mathbf{K}_c$  se escoge para que lo sea, en particular se podría encontrar  $\mathbf{K}_c$  para ubicar los valores propios de la matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}_c)$  en un lugar arbitrario si el par  $\{\mathbf{A} \ \mathbf{B}\}$  es controlable.

**Ejemplo 5.1.** Sea el caso del péndulo cuyo modelo es  $\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b\dot{\theta} + cT$ , donde  $a = g/l > 0$ ,  $b = k/m \geq 0$ ,  $c = 1/ml^2$ , y  $\theta$  es el ángulo y  $T$  es el torque aplicado. Diseñar una estrategia vía realimentación de estados de manera que el ángulo  $\theta$  sea igual a una referencia  $\theta_d$ . **R.:** Se definen las variables de estado  $x_1 = \theta_d - \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$  para tener al origen como punto de equilibrio, por lo que el modelo queda,  $\dot{x}_1 = -x_2$  y  $\dot{x}_2 = -a \sin(\theta_d - x_1) - bx_2 + cT$ . Para el punto de equilibrio se tiene,  $0 = x_{20}$  y  $0 = -a \sin(\theta_d) + cT_0$ , de donde  $T_0 = a/c \sin(\theta_d)$ . Si se define la entrada como  $u = T - T_0$ , entonces el sistema queda como,  $\dot{x}_1 = -x_2$  y  $\dot{x}_2 = -a\{\sin(\theta_d - x_1) - \sin(\theta_d)\} - bx_2 + cu$ . Para este caso las matrices del modelo lineal son

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a \cos(-x_1 + \theta_d) & -b \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a \cos(\theta_d) & -b \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}. \text{ Tomando } u = u_{ex} - \mathbf{k}_c \cdot \mathbf{x} \text{ con } u_{ex} = 0 \text{ y } \mathbf{k}_c = [k_{c1} \ k_{c2}] \text{ se encuentra}$$

que el par  $\mathbf{A} - \mathbf{bk}_c$  es Hurwitz para  $k_{c1} > \frac{a \cos \theta_d}{c}$ ;  $k_{c2} > -\frac{b}{c}$ . El torque a aplicar es en definitiva,  $T = T_0 + u = \frac{a \sin \theta_d}{c} + \mathbf{k}_c \mathbf{x} = \frac{a \sin \theta_d}{c} - k_{c1}(\theta_d - \theta) - k_{c2}\dot{\theta}$ . ♣

**Vía realimentación de salida.** Sea el sistema dado por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Nótese que  $\mathbf{y}$  no depende de  $\mathbf{u}$ , por simplicidad del análisis. La linealización resulta en  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$ , por lo que se propone un controlador dinámico vía realimentación sólo de la salida para estabilizar el origen. Este es de la forma,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz} + \mathbf{Gy}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{Lz} + \mathbf{My}$$

lo que resulta en el sistema,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{Fz} + \mathbf{Gy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax} + \mathbf{B(Lz} + \mathbf{MCx}) \\ \mathbf{Fz} + \mathbf{GCx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BMC} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

por lo que  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BMC} & \mathbf{BL} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$  se escoge Hurwitz para tener al origen como punto de equilibrio estable.

Un ejemplo de esta técnica es el controlador de estados basado en un observador del vector de estados  $\mathbf{x}$ ; en este caso, el observador queda como,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu} + \mathbf{K}_0(\mathbf{y} - \mathbf{Cz})$$

al considerar la realimentación como  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_c \mathbf{z}$ , entonces, el observador queda como,

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C} - \mathbf{BK}_c) \mathbf{z} + \mathbf{K}_0 \mathbf{y}, \quad \mathbf{u} = -\mathbf{K}_c \mathbf{z}$$

por lo que,  $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C} - \mathbf{BK}_c$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{L} = -\mathbf{K}_c$  y  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ . Lo que resulta en el sistema lineal,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK}_c \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C} - \mathbf{BK}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

En este caso se tiene un sistema resultante no-lineal dado por,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{Lz} + \mathbf{Mh}(\mathbf{x})) \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{Fz} + \mathbf{Gh}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Para estudiar la estabilidad de éste, se linealiza en torno a un punto de equilibrio arbitrario para obtener su matriz  $\mathcal{A}$  equivalente que resulta ser,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|_{x_0, u_0} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{Lz} + \mathbf{Mh}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{Lz} + \mathbf{Mh}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{z}} \right|_{x_0, u_0} \\ \left. \frac{\partial (\mathbf{Fz} + \mathbf{Gh}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial (\mathbf{Fz} + \mathbf{Gh}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{z}} \right|_{x_0, u_0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right\} \bigg|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{x_0, u_0} \\ \left. \frac{\partial (\mathbf{Fz} + \mathbf{Gh}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0} & \left. \frac{\partial (\mathbf{Fz} + \mathbf{Gh}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{z}} \right|_{x_0, u_0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}|_{x_0, u_0} + \mathbf{B}|_{x_0, u_0} \mathbf{M} \mathbf{C}|_{x_0, u_0} & \mathbf{B}|_{x_0, u_0} \mathbf{L} \\ \mathbf{G} \mathbf{C}|_{x_0, u_0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}|_{x_0, u_0} & -\mathbf{B}|_{x_0, u_0} \mathbf{K}_c \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{C}|_{x_0, u_0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C} - \mathbf{B} \mathbf{K}_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde,

$$\mathbf{C}|_{x_0, u_0} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0}$$

Lyapunov asegura que los puntos de operación  $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$ , tal que la matriz  $\mathcal{A}$  es Hurwitz, son estables.

Los casos anteriores tienen el inconveniente de que ante cambio de parámetros no se asegura que la salida siga la referencia. Por otro lado, la respuesta depende del punto de operación. En el caso anterior se tiene que la entrada está dada por  $T = \frac{a}{c} \text{sen}(\theta_d) - k_{c1}(\theta_d - \theta) - k_{c2} \dot{\theta}$ , por lo que si los parámetros  $a$  y/o  $c$  cambian de valor, entonces el torque aplicado no es el requerido y el sistema no estará en el punto de operación deseado.

**Ejemplo 5.2.** El péndulo tiene por relación en S.S. a  $T_o = a/c \text{sen}(\theta_{do})$ , si el sistema está en torno a  $\delta = 45^\circ$  y si se considera que se está utilizando un torque para tenerlo en ese punto de operación, determine la variación de éste si el parámetro de la planta  $a$  aumenta un 10%. **R.:** Dado que el torque aplicado es  $T_o = a/c \text{sen}(\theta_{do})$  entonces se tiene que  $a/c \text{sen}(45^\circ) = 1.1a/c \text{sen}(\theta_o)$  por lo que se logra en S.S. un  $\theta_o = 40^\circ$ . ♣

**Ejemplo 5.3.** Determinar si el reactor exotérmico es posible de control vía realimentación de estados. Indicar además si el sistema permite observar los estados. **R.:** Se asume que el reactor será controlado en torno a un punto de operación por lo que interesa saber si hay puntos de operación que no permitirían la controlabilidad y observabilidad de sus estados. Para tales efectos se opta por graficar el determinante de la matriz de controlabilidad y de la matriz de observabilidad. Las matrices son,

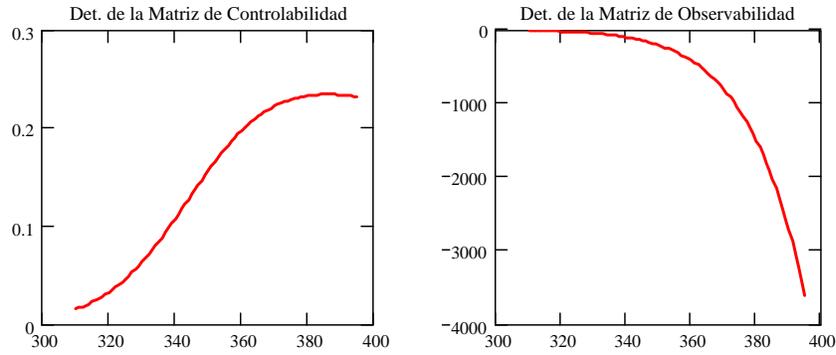


Fig. 5.1 Determinantes de la matriz de controlabilidad y observabilidad del reactor exotérmico.

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_o}} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{-q}{V} - k_0 e^{\left(\frac{-E}{Rx_2}\right)} & -k_0 \frac{E}{Rx_2^2} e^{\left(\frac{-E}{Rx_2}\right)} x_1 \\ \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 e^{\left(\frac{-E}{Rx_2}\right)} & \frac{-q}{V} + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 \frac{E}{Rx_2^2} e^{\left(\frac{-E}{Rx_2}\right)} x_1 - \frac{UA}{V\rho C_p} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_o}},$$

$$\mathbf{B} = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_o}} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{UA}{V\rho C_p} \end{array} \right], \quad \mathbf{C} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_1} & \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_o}} = [0 \quad 1], \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_o}} = 0.$$

A partir de las matrices anteriores se obtiene el determinante de las matrices de controlabilidad y observabilidad para cada punto de operación. La gráfica se ilustra en la Fig. 5.1 encontrándose que el sistema es controlable y observable en todo el rango de interés. ♣

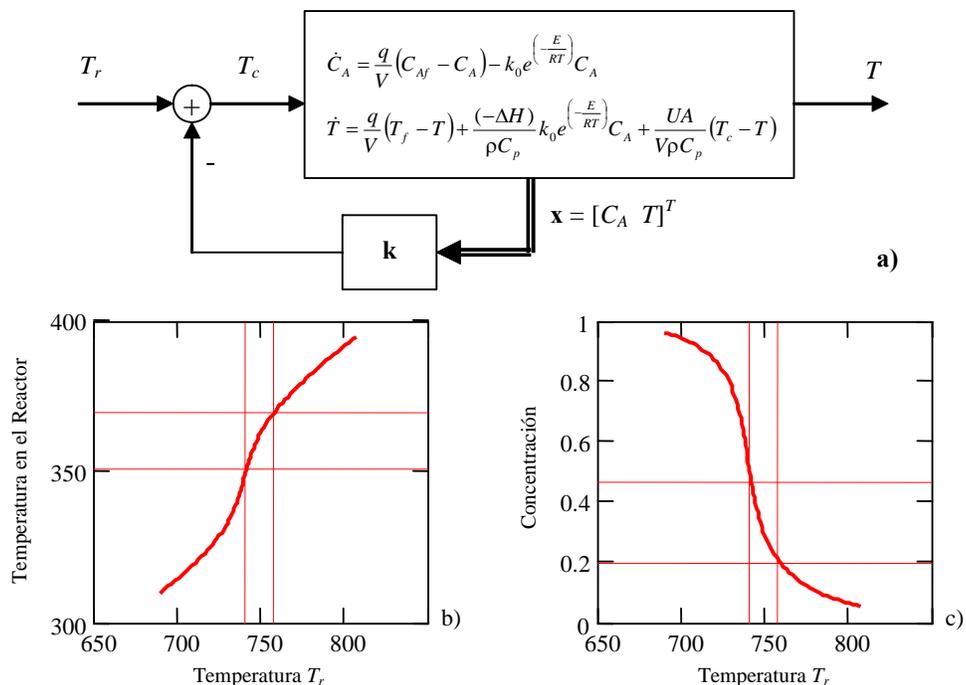


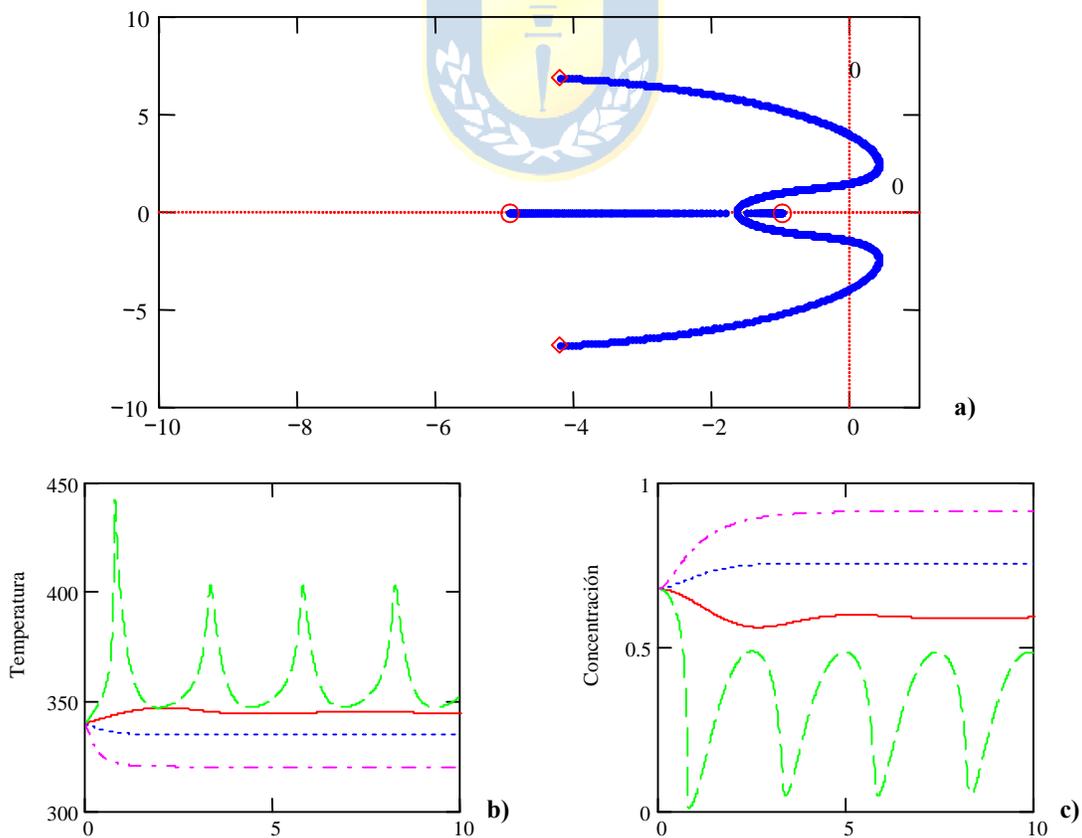
Fig. 5.2 Reactor con controlador de estados; a) Esquema resultante, b)  $T$  vs  $T_r$ , c)  $C_A$  vs  $T_r$ .

**Ejemplo 5.4.** Diseñar un controlador de estados para el reactor exotérmico para el punto de operación dado por  $T = 340^\circ\text{K}$ . **R.:** En el punto de operación el sistema es controlable por lo que procede al diseño como indicado en el curso de *Síntesis de Sistemas de Control*. Se encuentra que  $k_1 = 73.226$  y  $k_2 = 2.093$  para obtener valores propios resultantes en  $1 \pm j$ . El diagrama resultante se muestra en la Fig. 5.2(a) lo que genera nuevos puntos de operación dado que la entrada ahora es una variable ficticia denominada  $T_r$ . El esquema resultante genera puntos de operación para  $T_r$ , los que se muestran en la Fig. 5.2(b) y (c). A partir de éstos se puede concluir que ahora se tiene un único punto de operación para cada entrada. Para determinar la estabilidad de cada punto de operación se procede a obtener los valores propios del sistema para cada uno de ellos. El L.G.R. resultante se muestra en la Fig. 5.3(a). Se evidencia la existencia de puntos de operación inestables lo que podría ser una indicación de la persistencia de ciclos límites. Este rango está en  $T \in [351.5 \ 370.4]$  como acotado en la Fig. 5.2(b). La Fig. 5.3(b) y (c) muestran las respuestas dinámicas para entradas escalón en  $T_r$ , de manera de llevar  $T$  de 340 a  $340 + 20$ ,  $+5$ ,  $-5$  y  $-20$ . Claramente, al tratar de llevar el sistema a  $T = 340 + 20$ , se está tratando de llevar el sistema a un punto de operación inestable. La respuesta indica la entrada a un ciclo límite. En conclusión, un controlador lineal en un sistema no lineal puede solucionar el problema en torno a un punto de operación, pero al alejarse de éste se puede encontrar dinámicas insatisfactorias y/o problemas de inestabilidad, como la presencia de ciclos límites. ♣

## B . Regulación Vía Control Integral.

Para mitigar las desviaciones producto de cambios de parámetros se tiene la posibilidad de utilizar la técnica de control integral. Para su implementación se tienen dos alternativas.

**Vía Realimentación de Estados.** En el caso anterior se tiene  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  y se desea que  $\mathbf{y}$  sea igual a la referencia  $\mathbf{y}_d = \mathbf{0}$  (se asume nula por simplicidad), o bien  $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}_d(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , para lo



**Fig. 5.3** Estabilidad y respuesta dinámica del reactor con controlador de estados; **a)** L.G.R., **b)**  $T$  vs tiempo, **b)**  $C_A$  vs tiempo.

cual se supone existe solución única; es decir, se cumple  $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ ,  $\mathbf{0} = \mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$ . Si se define el error de seguimiento  $\mathbf{e} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y}$ , de manera que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{e}$ , el modelo total se puede formular como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x})$ , donde claramente el punto de equilibrio asegura que  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_d$ . Si en el punto de equilibrio se tiene a  $\mathbf{x}_d$ ,  $\mathbf{u}_d$ , y  $\boldsymbol{\sigma}_d$ , entonces la linealización del sistema extendido es

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}, \text{ donde el nuevo vector de estados es } \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_d \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_d \text{ y } \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d},$$

$\mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d}$ ,  $\mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d}$  son las matrices de la linealización de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  en torno al punto  $\mathbf{x}_d$ ,  $\mathbf{u}_d$ , y  $\boldsymbol{\sigma}_d$ .

Si el par  $\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\}$  es controlable, entonces se puede utilizar una realimentación de

estados para fijar los valores propios del sistema resultante. Es decir se puede encontrar  $\mathbf{K}_c = [\mathbf{K}_{c1} \ \mathbf{K}_{c2}]$  (donde  $\mathbf{K}_{c1}$  tiene tantas columnas como la dimensión de  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{K}_{c2}$  como la dimensión de  $\mathbf{y}$  ó  $\boldsymbol{\sigma}$ ) tal que la entrada se define por  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_c \boldsymbol{\xi}$  de manera que el sistema resultante dado por

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} & -\mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \mathbf{K}_{c1} & -\mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \mathbf{K}_{c2} \\ -\mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}_{ex} \text{ sea Hurwitz. Así la entrada es } \mathbf{u} = \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_c \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}_d$$

$= \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) - \mathbf{K}_{c2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_d) + \mathbf{u}_d$ . Como se desea en S.S. que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  sea nulo, entonces  $\boldsymbol{\sigma}$  en S.S. puede tomar valores arbitrarios, en particular  $\boldsymbol{\sigma}_d$  puede ser  $\boldsymbol{\sigma}_d = \mathbf{K}_{c2}^{-1}(\mathbf{u}_d - \mathbf{K}_{c1}\mathbf{x}_d)$  por lo que la entrada al sistema es  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\mathbf{x} - \mathbf{K}_{c2}\boldsymbol{\sigma}$ . Como es sabido,  $\mathbf{v}_{ex}$  puede ser utilizado para pre-alimentación o simplemente puede ser nulo.

La representación final queda como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\mathbf{x} - \mathbf{K}_{c2}\boldsymbol{\sigma})$ ,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x})$ . Para estudiar la estabilidad de éste, se linealiza en torno a un punto de equilibrio arbitrario para obtener su matriz  $\mathcal{A}$  equivalente que resulta ser,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\mathbf{x} - \mathbf{K}_{c2}\boldsymbol{\sigma})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}_0} & \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\mathbf{x} - \mathbf{K}_{c2}\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}_0} \\ \left. \frac{\partial (\mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}_0} & \left. \frac{\partial (\mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}_0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left. \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right\} \right|_{\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}_0} & \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}_0} \\ \left. \frac{\partial (\mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}_0} & \left. \frac{\partial (\mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}_0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} & -\mathbf{B}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \mathbf{K}_{c1} & -\mathbf{B}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \mathbf{K}_{c2} \\ -\mathbf{C}|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lyapunov asegura que los puntos de operación  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  son estables ssi la matriz  $\mathcal{A}$  es Hurwitz. En particular lo serán los  $\mathbf{x}_d$ ,  $\mathbf{u}_d$ , puesto que para ellos se verifica que la matriz  $\mathcal{A}$  es Hurwitz.

**Ejemplo 5.5.** El péndulo tiene por modelo a  $\ddot{\theta} = -a \sin \theta - b\dot{\theta} + cT$ , donde  $a = g/l > 0$ ,  $b = k/m \geq 0$ ,  $c = 1/ml^2$ , y  $\theta$  es el ángulo y  $T$  es el torque aplicado. Diseñar una estrategia vía control integral para mantener el ángulo  $\theta$  sea igual a una

referencia  $\theta_d$ . **R.:** Se definen las variables de estado  $x_1 = \theta_d - \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$  para tener al origen como punto de equilibrio, por lo que el modelo queda,  $\dot{x}_1 = -x_2$  y  $\dot{x}_2 = -a \text{sen}(-x_1 + \theta_d) - bx_2 + cu$ , con  $u = T$  y la salida  $y = x_1$ . En el punto de equilibrio se tiene  $\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_o = a/c \text{sen}(\delta)$ . Nótese que el punto de operación no exige que  $\mathbf{u}_o = \mathbf{0}$ . Las matrices quedan

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a \cos(\theta_d) & -b \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{c} = [1 \ 0]$ . El par  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$  es controlable por lo que se puede escoger una variable de estado extra  $\dot{\sigma} = \mathbf{y}_d - \mathbf{y} = 0 - x_1 = -x_1$  y el controlador de estados  $\mathbf{K}_c = [\mathbf{K}_{c1} \ \mathbf{K}_{c2}] = [k_{c11} \ k_{c12} \ k_{c2}]$  para fijar los valores propios arbitrariamente. La ley de control queda  $\mathbf{u} = T = \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\mathbf{x} - \mathbf{K}_{c2}\sigma = -k_{c11}x_1 - k_{c12}x_2 - k_{c2}\sigma = -k_{c11}(\theta_d - \theta) - k_{c12}\dot{\theta} - k_{c2}\sigma$ . ♣

**Vía Realimentación de Salida.** Para estos efectos debe considerarse que al sistema original  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  se le unen controladores basados en integradores del tipo  $\dot{\sigma} = \mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x})$  y que la entrada debiera ser  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\mathbf{x} - \mathbf{K}_{c2}\sigma$  (con  $\mathbf{K}_{c1}$  y  $\mathbf{K}_{c2}$  calculados como en el punto anterior y con  $\mathbf{v}_{ex}$  para pre-alimentación o simplemente nula) para lo cual se necesita el vector de estados  $\mathbf{x}$ . Sin embargo, se asume que este vector no está disponible y se propone el observador de estados de orden reducido (pues sólo se observa  $\mathbf{x}$ ) dado por la expresión  $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \mathbf{u} + \mathbf{K}_o(\mathbf{y} - \mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \hat{\mathbf{x}})$ , que se diseña para el punto de operación  $\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d$  en donde el sistema linealizado resulta en  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \mathbf{x} + \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \mathbf{x}$ . En efecto,  $\mathbf{K}_o$  es escogido para que la matriz  $\mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} - \mathbf{K}_o \mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d}$  sea Hurwitz. Es más, si el par  $\{\mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d}, \mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d}\}$  es observable, los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} - \mathbf{K}_o \mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d}$  pueden escogerse arbitrariamente. Así, la entrada  $\mathbf{u}$  queda como  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_{c2}\sigma$ , por lo que el sistema resultante es,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_{c2}\sigma) \\ \dot{\sigma} &= \mathbf{y}_d - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} (\mathbf{v}_{ex} - \mathbf{K}_{c1}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_{c2}\sigma) + \mathbf{K}_o \mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

Para estudiar la estabilidad del sistema resultante, se linealiza en torno a un punto de equilibrio arbitrario  $\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o$  para obtener su matriz  $\mathcal{A}$  equivalente que resulta ser,

$$\mathcal{A}|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \\ \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \\ \frac{\partial \dot{\hat{\mathbf{x}}}}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \dot{\hat{\mathbf{x}}}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \dot{\hat{\mathbf{x}}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_o, \sigma_o, \mathbf{u}_o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \mathbf{K}_{c2} & \mathbf{A}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} - \mathbf{B}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \mathbf{K}_{c1} - \mathbf{K}_o \mathbf{C}|_{\mathbf{x}_d, \mathbf{u}_d} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_o, \sigma_o, \mathbf{u}_o}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BK}_{c2} & -\mathbf{BK}_{c1} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}|_{x_d, u_d} \mathbf{K}_{c2} & \mathbf{A}|_{x_d, u_d} - \mathbf{B}|_{x_d, u_d} \mathbf{K}_{c1} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C}|_{x_d, u_d} \end{bmatrix}_{x_0, \sigma_0, u_0} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{A}|_{x_0, u_0} & -\mathbf{B}|_{x_0, u_0} \mathbf{K}_{c2} & -\mathbf{B}|_{x_0, u_0} \mathbf{K}_{c1} \\ -\mathbf{C}|_{x_0, u_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}|_{x_d, u_d} \mathbf{K}_{c2} & \mathbf{A}|_{x_d, u_d} - \mathbf{B}|_{x_d, u_d} \mathbf{K}_{c1} - \mathbf{K}_0 \mathbf{C}|_{x_d, u_d} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Lyapunov asegura que los puntos de operación  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  son estables ssi la matriz  $\mathcal{A}$  anterior es Hurwitz. En particular lo serán los  $\mathbf{x}_d$ ,  $\mathbf{u}_d$ , puesto que para ellos se verifica que la matriz  $\mathcal{A}$  es Hurwitz.

En este caso, no se necesitan las variables de estado del sistema  $\mathbf{x}$ , pues se observan. Además, cambios en los parámetros son absorbidos por los controladores integradores.

Desgraciadamente, los diseños anteriores permiten un buen comportamiento en torno al punto de operación. Por lo tanto, deberá estudiarse el comportamiento del sistema no-lineal original y el control lineal como un todo. Una alternativa es utilizar el L.G.R. del sistema total linealizado y de ahí derivar algunas conclusiones para cada punto de operación. La siguiente técnica permite hacer prevalecer los criterios de diseño en los diferentes puntos de operación.

### 5.3 Diseño Vía Ganancia Programada.

El controlador lineal sólo asegura su comportamiento en torno al punto de operación. Este el caso de un estanque de área función de la altura que es controlado utilizando un controlador PI. Un controlador que utiliza la técnica de ganancia programada, modifica los parámetros del controlador, utilizando técnicas lineales, de acuerdo al punto de operación. Para determinar el punto de operación se utiliza una o varias variables del sistema (normalmente las entradas). Para analizar esta técnica se revisa el caso del estanque, en donde el área de éste se puede identificar como función de la altura de este, Fig. 5.4.

En este caso se tiene que el modelo está dado por,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = \beta(h) \frac{dh}{dt} = f_e - c\sqrt{2h},$$

donde  $\beta(h)$  es el área en función de la altura  $h$  y  $c\sqrt{2h}$  es el flujo de salida. Sea  $x$  la altura  $h$  y  $f_e$  la entrada  $u$ , entonces el modelo queda como,

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)}(u - c\sqrt{2x}) = f(x, u).$$

Sea la altura  $h$  la variable de salida  $y$ , entonces  $y = x$ , la cual debe seguir la referencia  $y_d$ , la cual a su vez será utilizada como variable programadora; es decir, la que define el valor de los parámetros de los controladores.

Si se desea  $y_d = y_{do}$  (la altura  $h = y_{do}$ ), la entrada  $u$  (flujo  $f_e$ ) debería ser  $u_o = c\sqrt{2y_{do}}$ . Así, un punto de operación tiene por valores  $x = y_{do}$ ,  $u = u_o(y_{do})$ . Linealizando el modelo en torno a  $y_{do}$ ,  $u_o(y_{do})$ , se tiene a  $\dot{x}_\delta = a(y_{do})x_\delta + b(y_{do})u_\delta$ , donde,

$$a(y_{do}) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=y_{do} \\ u=u_o}} = \left\{ \frac{1}{\beta(x)} \left\{ \frac{-c}{\sqrt{2x}} \right\} - \frac{\beta'(x)}{\beta^2(x)} (u - c\sqrt{2x}) \right\} \bigg|_{\substack{x=y_{do} \\ u=u_o}} = -\frac{c\sqrt{2y_{do}}}{2y_{do}\beta(y_{do})},$$

$$b(y_{do}) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=y_{do} \\ u=u_o}} = \frac{1}{\beta(x)} \bigg|_{\substack{x=y_{do} \\ u=u_o}} = \frac{1}{\beta(y_{do})},$$

$$x_\delta = x - y_{do},$$

$$u_\delta = u - u_o.$$

Dado que el sistema es de primer orden, un controlador PI permitirá lograr cero error en estado estacionario y compensar el efecto de las perturbaciones. Sea el controlador tipo de PI de la forma,  $u_\delta = k_1 e_\delta + k_2 \sigma$ , donde  $\dot{\sigma} = e_\delta = y_d - x = r_\delta - x_\delta$ , con  $r_\delta = y_d - y_{do}$ . Con esto, la ecuación característica es,  $s^2 - (a - bk_1)s + bk_2 = 0$ , por lo que si la ecuación deseada es  $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ , con  $\omega_n > 0$  y  $0 < \zeta < 1$  conocidos, entonces las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  se pueden tomar como,

$$k_1(y_{do}) = \frac{2\zeta\omega_n + a(y_{do})}{b(y_{do})}, \quad k_2(y_{do}) = \frac{\omega_n^2}{b(y_{do})}.$$

Como se puede apreciar, las ganancias del controlador PI son función del punto de operación para obtener un factor de amortiguamiento y una frecuencia natural de oscilación dados. Si, para efectos de simplificación, se considera al controlador PI de la forma,  $u_\delta = k \left\{ e_\delta + \frac{1}{T} \sigma \right\}$ , se tiene que  $k = k_1$  y  $T = k_1/k_2$ , con lo que,

$$k(y_{do}) = \frac{2\zeta\omega_n + a(y_{do})}{b(y_{do})} \cong \frac{2\zeta\omega_n^2}{b(y_{do})} = 2\zeta\omega_n\beta(y_{do}), \quad T(y_{do}) = \frac{2\zeta\omega_n + a(y_{do})}{\omega_n^2} \cong \frac{2\zeta}{\omega_n},$$

si se considera que  $|a(y_{do})| \ll 2\zeta\omega_n$ , Fig. 5.5(a). De esta manera se puede tomar  $k(y_{do}) = 2\zeta\omega_n\beta(y_{do})$  y  $T = 2\zeta/\omega_n$ , con lo que sólo una ganancia debe ser programada en función del punto de operación. El sistema resultante considerando la variable de estado  $\xi = [x_\delta \ \sigma]^T$  está dado por,

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_I(y_{do})\xi + \mathbf{b}_I r_\delta, \quad y_\delta = \mathbf{c}_I \xi,$$

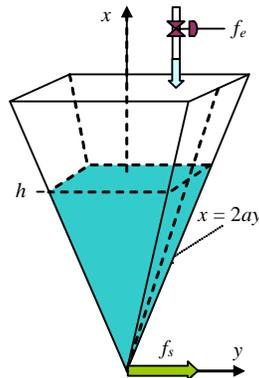


Fig. 5.4 Estanque no-lineal (área variable).

donde,  $\mathbf{A}_1(y_{do}) = \begin{bmatrix} a(y_{do}) - 2\zeta\omega_n & \omega_n^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{c}_1 = [1 \ 0]$ , por lo que la F. de T. resultante es,

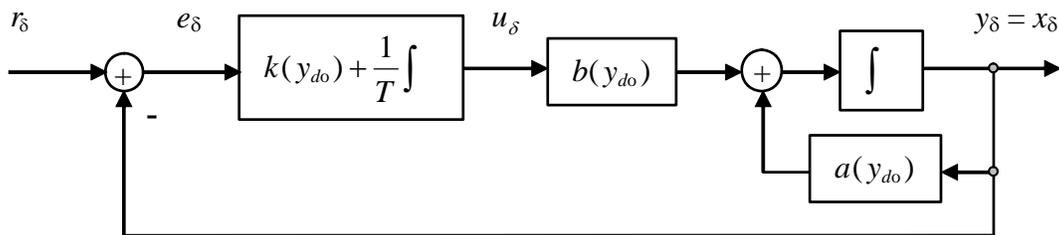
$$\frac{x_\delta}{r_\delta} = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n - a(y_{do}))s + \omega_n^2}.$$

Nótese que esta F. de T. es todavía función del punto de operación puesto que se consideró en el análisis que  $|a(y_{do})| \ll 2\zeta\omega_n$ . En el caso de no hacer esta simplificación en el análisis, la F. de T. resultante tendría un polinomio característico como el ideal. Resultados simulados se muestran en la Fig. 5.6. Claramente, el controlador de ganancias programadas permite mejorar la respuesta para los distintos puntos de operación, Fig. 5.6(b) comparada con el mismo controlador pero con sus parámetros fijos y calculados para un punto de operación dado Fig. 5.6(a).

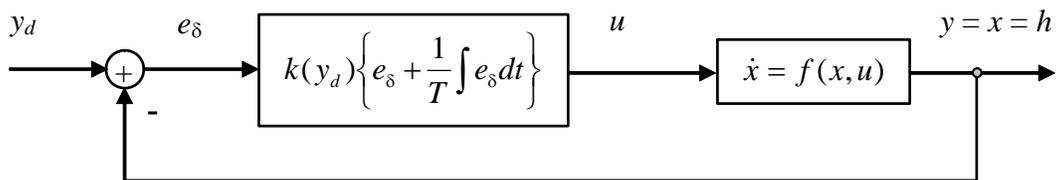
Para revisar el comportamiento real del sistema con el controlador lineal incluido debe revisarse el sistema original no-lineal en conjunto con el controlador, considerando que la variable programadora es la referencia  $y_d$  y no el punto de operación  $y_{do}$ , Fig. 5.5(b). Esto trae consecuencias adversas puesto que la variable programadora puede variar y por tanto su derivada no es cero, lo que agrega dinámicas no consideradas en el proceso de diseño anterior. El modelo del controlador en conjunto con la planta es,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\beta(x)}(u - c\sqrt{2x}) \\ \dot{\sigma} &= y_d - x \\ y &= x \end{aligned}$$

donde la entrada está dada por  $u = k(y_d) \left\{ (y_d - x) + \frac{1}{T} \sigma \right\}$ , con  $k(y_d) = 2\zeta\omega_n\beta(y_d)$  por lo que el modelo resultante está dado por,



a)



b)

**Fig. 5.5** Estanque no-lineal con controlador de ganancia programada; a) esquema linealizado, b) esquema no-lineal.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{\beta(x)} \left( k(y_d) \left\{ (y_d - x) + \frac{1}{T} \sigma \right\} - c\sqrt{2x} \right) \\ \dot{\sigma} &= y_d - x \\ y &= x\end{aligned},$$

cuyo punto de equilibrio para una entrada  $y_d = y_{do}$  es  $x_o = y_{do}$ ,  $y_o = y_{do}$ ,  $\sigma_o = \frac{c\sqrt{2y_{do}}}{\omega_n^2 \beta(y_{do})}$ . Una alternativa de análisis del sistema completo es la linealización en torno a un punto de operación considerando el vector de variables de estado  $\mathbf{p}_\delta = [x - x_o \quad \sigma - \sigma_o]^T$  lo que resulta en  $\dot{\mathbf{p}}_\delta = \mathbf{A}_n(y_{do})\mathbf{p}_\delta + \mathbf{b}_n(y_{do})r_\delta$ , con la salida  $y_\delta = \mathbf{c}_n\mathbf{p}_\delta$ . En este caso se obtienen las matrices como,

$$\mathbf{A}_n(y_{do}) = \begin{bmatrix} a(y_{do}) - 2\zeta\omega_n & \omega_n^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n + \gamma(y_{do}) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_n = [1 \quad 0],$$

por lo que la función de transferencia resultante es,

$$\frac{y_\delta}{r_\delta} = \frac{(2\zeta\omega_n + \gamma(y_{do}))s + \omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n - a(y_{do}))s + \omega_n^2},$$

donde,  $\gamma(y_{do}) = k'(y_{do})\sigma_o(y_{do})/T\beta(y_{do})$ , con  $k'(y_{do}) = \left. \frac{dk(y_d)}{dy_d} \right|_{y_d=y_{do}}$ .

Claramente, esta última F. de T. difiere de la anterior en el término  $\gamma(y_{do})$  puesto que los cambios de la referencia  $y_d$  afectan dinámicamente los parámetros del controlador y con ello la dinámica total resultante. En muchos casos este controlador es suficiente, puesto que logra cero error en S.S. y permite absorber la variación de parámetros. Sin embargo, en aquellos casos donde la dinámica es parte de los requisitos de control, se requiere modificar la estrategia de diseño del controlador.

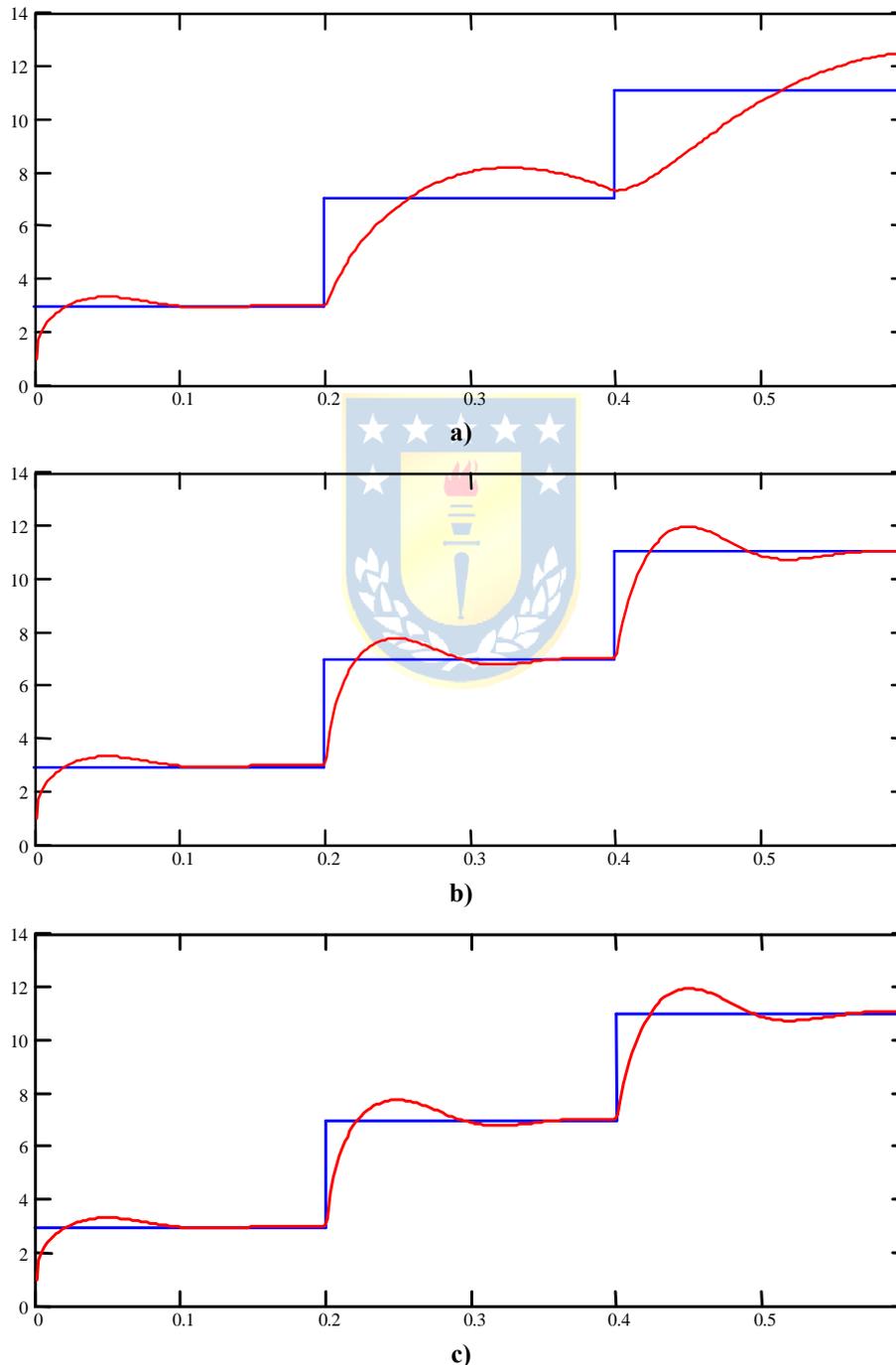
Una alternativa de solución a este problema es considerar el controlador PI de la forma,

$$u = k(y_d)e + \frac{1}{T}z,$$

donde,  $\dot{z} = k(y_d)e$  y  $e = y_d - x$ , con lo que el sistema resultante es,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{\beta(x)} \left( k(y_d)(y_d - x) + \frac{1}{T}z - c\sqrt{2x} \right) \\ \dot{z} &= k(y_d)(y_d - x) \\ y &= x\end{aligned},$$

cuyo punto de equilibrio para una entrada  $y_d = y_{do}$  es  $x_o = y_{do}$ ,  $y_o = y_{do}$ ,  $z_o = \frac{2\zeta c \sqrt{2y_{do}}}{\omega_n}$ . Una alternativa de análisis del sistema completo es la linealización en torno a un punto de operación considerando el vector de variables de estado  $\mathbf{p}_\delta = [x - x_o \ z - z_o]^T$  lo que resulta en  $\dot{\mathbf{p}}_\delta = \mathbf{A}_n(y_{do})\mathbf{p}_\delta + \mathbf{b}_n(y_{do})r_\delta$ , con la salida  $y_\delta = \mathbf{c}_n\mathbf{p}_\delta$ . En este caso se obtienen las matrices como,



**Fig. 5.6** Estanque no-lineal con controlador PI; a) de parámetros fijos para  $y_{do}$  dado, b) con parámetros programados, c) con parámetros programados y mejorado.

$$\mathbf{A}_n(y_{do}) = \begin{bmatrix} a(y_{do}) - 2\zeta\omega_n & \omega_n / 2\zeta\beta(y_{do}) \\ -2\zeta\omega_n\beta(y_{do}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n \\ 2\zeta\omega_n\beta(y_{do}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_n = [1 \quad 0],$$

por lo que la función de transferencia resultante es,

$$\frac{y_\delta}{r_\delta} = \frac{2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + (2\zeta\omega_n - a(y_{do}))s + \omega_n^2}.$$

Sin lugar a dudas este controlador permite obtener una respuesta dinámica independiente del punto de operación. Los resultados simulados se muestran en la Fig. 5.6(c) los cuales en este caso en particular no muestran mejoras substanciales respecto del caso anterior, Fig. 5.6(b).

Los casos hasta aquí analizados permiten la utilización de técnicas de linealización para su análisis y diseño de controladores. Si bien se cumplen los objetivos básicos, quedan los de globalidad de la solución. Por ejemplo, los cambios que pueden tener las variables programadoras deben ser moderados o se puede sacar el sistema de la región de atracción. Técnicas más generales que las aquí revisadas se introducen en el capítulo siguiente.



## 6 Linealización Exacta Vía Realimentación.

Una de las alternativas más expeditas para la linealización es utilizar la realimentación de las variables de estado. Esta clase de estrategia se divide en dos tipos. Una para linealizar los estados de entrada; es decir, para obtener respuestas lineales en variables de estado del sistema y la otra para las variables de salida; es decir, un comportamiento lineal de las salidas respecto de entradas sin importar el comportamiento probablemente no-lineal de los estados. Ambas alternativas requieren conocer el modelo de la planta y entregan opciones de diseño que permiten ventajas distintas en uno y otro caso.

### 6.1 Conceptos Básicos.

Antes de analizar en detalle las diferentes alternativas de control vía realimentación exacta, se revisan ejemplos de cada una de éstas para familiarizarse con la estructuras de control.

#### A. Linealización Vía Realimentación y la Forma Canónica.

La idea fundamental de la linealización vía realimentación es la cancelación de las no-linealidades de un sistema mediante la re-definición de la entrada a éste. Por ejemplo, en el caso del estanque en el cual el área es función de la altura, se tiene el siguiente modelo,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_0^h A(z) dz \right\} = u - a\sqrt{2gh}, \quad (6.1)$$

el cual se puede escribir en forma simplificada como,

$$A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh},$$

por lo que si la entrada  $u$  se escoge como

$$u = a\sqrt{2gh} + A(h)v, \quad (6.2)$$

con  $v$  una nueva entrada (Fig. 6.1), se tiene el modelo resultante,

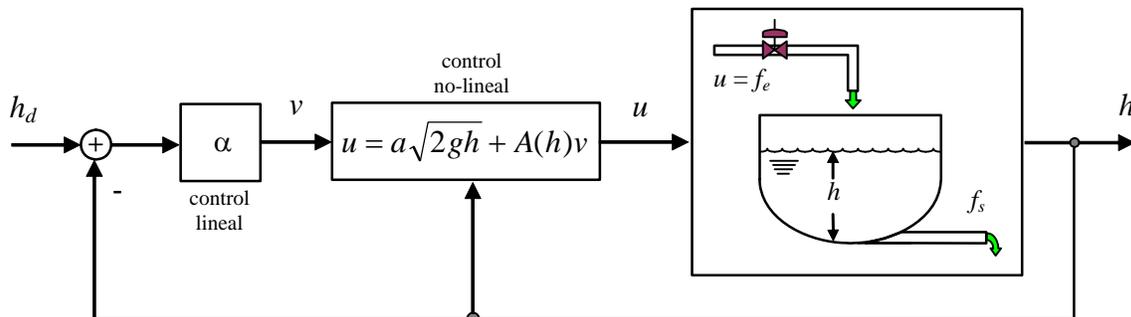


Fig. 6.1 Modelo del estanque linealizado.

$$\dot{h} = v,$$

el cual es lineal y permite por tanto escoger  $v$  para lograr objetivos adicionales de control. Por ejemplo,  $v$  se puede escoger como,

$$v = \alpha(h_d - h),$$

con  $\alpha$  una constante positiva y  $h_d$  la referencia de altura, Fig. 6.1. Así se tiene una dinámica resultante dada por,

$$\dot{h} + \alpha h = \alpha h_d,$$

lo que indica que  $h \rightarrow h_d$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . De acuerdo a las ecuaciones anteriores se tiene que la entrada está finalmente dada por,

$$u = a\sqrt{2gh} + A(h)\alpha e,$$

con  $e = h_d - h$ . Una versión más refinada podría considerar que  $h_d$  es conocida y tiempo variable, por lo que la entrada  $v$  se puede escoger como  $v = \dot{h}_d + \alpha(h_d - h)$ , con lo que la dinámica lineal resultante quedaría como,

$$\dot{h} = \dot{h}_d + \alpha(h_d - h),$$

que es equivalente a,

$$\dot{e} + \alpha e = 0,$$

donde claramente se tiene que el error  $e \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . La aplicación de esta estrategia de re-definir la entrada para cancelar las no-linealidades se puede aplicar si el sistema tiene un modelo de la forma canónica controlable cuya forma general para sistemas SISO es,

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u,$$

donde  $u$  es la entrada,  $x$  es la salida,  $\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \ddot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]^T$  es el vector de estados y  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  son funciones escalares no-lineales de los estados. La representación anterior puede también escribirse como,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u \end{bmatrix}.$$

Esta última representación permite ver que si se re-define la entrada  $u$  como,

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{x})}(-f(\mathbf{x}) + v),$$

con  $v$  una nueva entrada, se obtiene el modelo resultante,

$$x^{(n)} = v,$$

que corresponde a un modelo lineal y por tanto se puede utilizar la teoría de control lineal para conseguir objetivos de control específicos. Por ejemplo, si se define a la entrada como,

$$v = -a_0 x - a_1 \dot{x} - \dots - a_{n-1} x^{(n-1)},$$

con  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , escogidos de manera que el polinomio  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$  tenga sus raíces en el S.P.I. lleva a una dinámica exponencialmente estable del tipo,

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0x = 0,$$

lo que implica que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En aquellos casos que se desee el seguimiento de una referencia  $x_d$ , se puede re-definir la entrada como,

$$v = x_d^{(n)} + a_0e + a_1\dot{e} + \dots + a_{n-1}e^{(n-1)},$$

con  $e(t) = x_d(t) - x(t)$  lleva a la convergencia exponencial del error; es decir,  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Esta alternativa se puede utilizar en sistemas MIMO como se muestra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 6.1.** Un robot con dos juntas tiene por modelo a  $\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h\dot{q}_1 - h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$ ,

donde  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$  son los ángulos de las uniones,  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2]^T$  son las entradas, y  $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, g_1$ , y  $g_2$  dependen de  $\mathbf{q}$ . Proponga una estrategia de linealización exacta para seguimiento. **R.:** El modelo anterior se puede escribir como  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} +$

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$ , con  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h\dot{q}_1 - h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$  y  $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$ . Por lo que la

entrada  $\boldsymbol{\tau}$  se puede definir como  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$ , con  $\mathbf{v}$  una nueva entrada, lo que resulta en el modelo  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$ .

Si  $\mathbf{q}_d$  es la referencia entonces  $\mathbf{v}$  se puede definir como,  $\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_d + 2\lambda(\dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}) + \lambda^2(\mathbf{q}_d - \mathbf{q})$ , lo que al definir el error

$\mathbf{e} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$  resulta en la ecuación dinámica  $\ddot{\mathbf{e}} + 2\lambda\dot{\mathbf{e}} + \lambda^2\mathbf{e} = \mathbf{0}$ , donde el error converge a cero exponencialmente. ♣

Desafortunadamente, los modelos no se encuentran en general en esta forma canónica controlable y por tanto se estudian técnicas que permiten transformar un sistema arbitrario a esta forma. Al igual que los sistemas lineales, no todos los sistemas pueden ser transformados y esto depende de sus características particulares.

## B. Linealización de los Estados de Entrada.

Considerar el caso de un sistema de una entrada de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$  en el cual se desea encontrar una nueva entrada de manera de obtener un sistema lineal resultante. Esto se realiza en dos pasos, primero se encuentra una transformación de estados  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$  y luego una transformación de entrada  $u = u(\mathbf{x}, v)$  de manera que el sistema original se transforme en uno equivalente invariante en el tiempo de la forma  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v$ , para luego diseñar  $v$  de manera de obtener una respuesta deseada, Fig. 6.2. Por ejemplo, sea el sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + ax_2 + \text{sen}(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \cos(x_1) + u \cos(2x_1) \end{aligned}$$

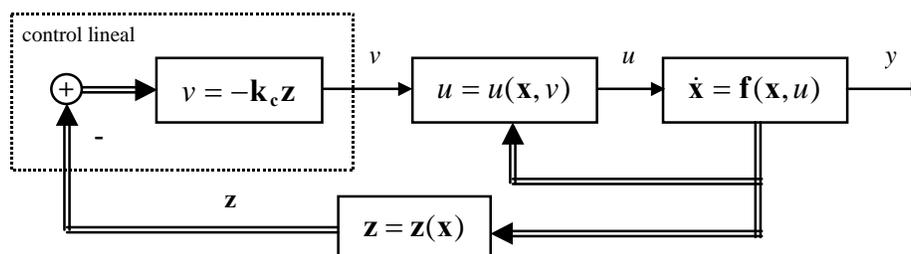


Fig. 6.2 Linealización de estados.

que tiene por punto de equilibrio al origen, no puede ser linealizado directamente puesto que no es evidente encontrar  $u$  de manera de obtener una representación lineal, por cuanto el sistema no está en una forma canónica controlable. Sin embargo, si se define,

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= ax_2 + \text{sen}(x_1) \end{aligned} ,$$

donde el origen de  $\mathbf{x}$  es también el origen en  $\mathbf{z}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_1 \cos(z_1) + \cos(z_1) \text{sen}(z_1) + ua \cos(2z_1) \end{aligned} ,$$

el cual puede ser linealizado re-definiendo la entrada  $u$  como,

$$u = \frac{1}{a \cos(2z_1)} (v - \cos(z_1) \text{sen}(z_1) + 2z_1 \cos(z_1)) ,$$

o también en función de los estados originales como,

$$u = \frac{1}{a \cos(2x_1)} (v - \cos(x_1) \text{sen}(x_1) + 2x_1 \cos(x_1)) ,$$

por lo que el sistema lineal resultante es,



$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \end{aligned} .$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= -2z_2 \end{aligned} ,$$

Al tomar  $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 = -2z_2$  se obtiene finalmente,

que tiene polos iguales en  $-2$  por lo que  $z_1$  y  $z_2$  convergen al  $(0,0)$ , por lo que  $x_1$  y  $x_2$  convergen al  $(0,0)$ .

Algunos comentarios importantes que se derivan del ejemplo anterior son,

- i) La entrada se calcula como  $u = \frac{1}{a \cos(2x_1)} (v - \cos(x_1) \text{sen}(x_1) + 2x_1 \cos(x_1))$  la cual no está definida para  $x_1 = \pi/4 \pm l\pi/2$ , con  $l = 0, 1, \dots$  por lo que el resultado de la linealización no es global.
- ii) La linealización de los estados de entrada se logra mediante una transformación de estados y una transformación de entradas, ambas basadas en los estados, por lo tanto ésta es una linealización vía realimentación.
- iii) Para implementar la estrategia se requiere de los estados  $\mathbf{z}$  lo que puede ser no factible como también pueden no tener significado físico, para lo cual deberá disponerse de  $\mathbf{x}$ .
- iv) Todo el diseño se fundamenta en el conocimiento de los parámetros y modelo del sistema, cualesquier incertidumbre acarrearán errores.
- v) El seguimiento también puede considerarse, pero no es directo puesto que la linealización se logra para las variables  $\mathbf{z}$  y no las físicamente involucradas en el sistema, que son  $\mathbf{x}$ .

Hay dos preguntas relevantes en este punto: a) ¿ qué clases de sistemas no-lineales pueden ser sujeto de esta técnica ?, y b) ¿ cómo se encuentran las transformaciones que hacen esto posible ?.

### C . Linealización Entrada-Salida

La idea en este caso es la de obtener una relación lineal entre la entrada y la salida del sistema más que con los estados de este. Sin embargo, se espera que los estados estén acotados. Es decir, se desea que la salida tenga un comportamiento deseado, por ejemplo, seguimiento de una referencia. El sistema está modelado en este caso por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$ ,  $y = h(\mathbf{x})$ , de donde no se ve una relación clara entre la entrada y la salida del sistema. Sea el siguiente ejemplo,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \text{sen}(x_2) + (x_2 + 1)x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1^5 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

para generar una relación entre la entrada  $u$  y la salida  $y$ , se deriva la salida,

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = \text{sen } x_2 + (x_2 + 1)x_3,$$

como  $u$  no esta en  $\dot{y}$ , se deriva nuevamente,

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \cos(x_2)x_2 + x_3(x_2 + x_1) + x_2x_3 \\ &= (\cos(x_2) + x_3)(x_1^5 + x_3) + (x_1^3 + u)(x_2 + 1) \\ &= (x_2 + 1)u + x_1^2(x_2 + 1) + (\cos(x_2) + x_3)(x_1^5 + x_3) \\ &= (x_2 + 1)u + f_1(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

donde  $f_1(\mathbf{x}) = x_1^2(x_2 + 1) + (\cos(x_2) + x_3)(x_1^5 + x_3)$ . Claramente, la expresión anterior relaciona la entrada  $u$  y la salida  $y$ , por lo que si se toma la entrada  $u$  como,

$$u = \frac{1}{x_2 + 1}(-f_1(\mathbf{x}) + v),$$

donde  $v$  es una nueva entrada, se obtiene que

$$\ddot{y} = v,$$

que corresponde a una relación lineal entre la entrada y la salida y por tanto la nueva entrada  $v$  se puede acondicionar para lograr los objetivos de seguimiento. En particular si el error entre la salida actual  $y$  y la deseada  $y_d$  es  $e$ , entonces  $v$  se puede tomar como  $v = \ddot{y}_d + k_0e + k_1\dot{e}$ , con  $k_0$  y  $k_1$  positivos, con lo que se obtiene la ecuación dinámica para el error como,

$$\ddot{e} + k_1\dot{e} + k_0e = 0,$$

por lo que  $y(t) \rightarrow y_d(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , Fig. 6.3.

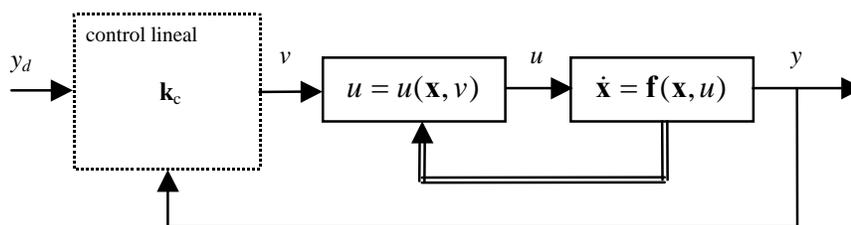


Fig. 6.3 Linealización de entrada-salida.

Algunos comentarios importantes que se derivan del ejemplo anterior son,

- i) La entrada se calcula como  $u = \frac{1}{x_2 + 1}(-f_1(\mathbf{x}) + v)$  la cual no está definida para  $x_2 = -1$  por lo que el resultado de la linealización no es global.
- ii) La implementación requiere de todos los estados del sistema.
- iii) Dado que  $y$  se derivó dos veces para obtener la salida en función de la entrada, se dice que el sistema tiene grado relativo 2 (en general  $r$ ). Si  $n$  es el orden del sistema original entonces  $r \leq n$  para sistemas controlables.
- iv) El sistema resultante de la linealización entrada-salida es de orden 2 y el sistema es de orden 3. Por lo que hay una dinámica que no aparece en forma explícita. Esta dinámica se conoce como dinámica interna y deberá ser estable para cumplir con los objetivos de control del sistema. En el ejemplo anterior el estado interno es  $x_3$  (puesto que  $x_2, y, y \, dy/dt$  forman un nuevo set de variables de estado) y está dado por,

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + \frac{1}{x_2 + 1}(\ddot{y}_d + k_1\dot{e} + k_2e + f_1(\mathbf{x})),$$

donde no es obvio demostrar su estabilidad.

**Ejemplo 6.2.** Utilizar control entrada-salida para regular la temperatura en el reactor. **R.:** Las ecuaciones del reactor son,

$$\dot{C}_A = \frac{q}{V}(C_{Af} - C_A) - k_0 e^{\left(\frac{-E}{RT}\right)} C_A$$

$$\dot{T} = \frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 e^{\left(\frac{-E}{RT}\right)} C_A + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T)$$

$$\dot{y} = \dot{T} = \frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 e^{\left(\frac{-E}{RT}\right)} C_A + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T). \text{ Finalmente, si se considera una nueva entrada } v \text{ tal que se}$$

cumpla que  $\frac{q}{V}(T_f - T) + \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 e^{\left(\frac{-E}{RT}\right)} C_A + \frac{UA}{V\rho C_p}(T_c - T) = v$ , entonces,  $\dot{T} = v$ . Es decir, la entrada al reactor  $T_c$  debe

ser escogida como,  $T_c = \frac{V\rho C_p}{UA} \left\{ v - \frac{q}{V}(T_f - T) - \frac{(-\Delta H)}{\rho C_p} k_0 e^{\left(\frac{-E}{RT}\right)} C_A \right\} + T$ . La expresión resultante,  $\dot{T} = v$ , representa una

ley lineal por lo que se puede escoger  $v$  de manera de lograr alguna dinámica apropiada. Por ejemplo, se hace  $v = k_1(T_d - T)$ ,

por lo que se obtiene una F. de T. resultante dada por,  $\frac{T}{T_d} = \frac{k_1}{s + k_1}$ , donde claramente se tiene un sistema estable si se

escoge  $k_1$  positivo. La simulación del sistema resultante está ilustrada en la Fig. 6.4 para  $k_1 = 5$ . La simulación muestra un sistema de primer orden que puede operar en cualesquier punto de operación. Sin embargo, queda la interrogante de la naturaleza de la dinámica de la concentración. ♣

## D. Dinámicas Internas en Sistemas Lineales.

En esta parte se revisa el concepto de dinámica interna en sistemas lineales, pues son simples de analizar y los resultados y conclusiones ayudan a entender su extensión a sistemas no-lineales. Se considera primero el siguiente ejemplo,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} ,$$

donde se requiere que la salida siga a la referencia  $y_d$ . Derivando la salida se obtiene que,

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2 + u ,$$

por lo que si  $u = -x_2 + \dot{y}_d + (y_d - y)$ , se tiene que  $\dot{y} = x_2 - x_2 + \dot{y}_d + (y_d - y)$ , lo que resulta en

$$\dot{e} + e = 0 ,$$

de donde claramente se tiene que  $e(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , ó  $y(t) \rightarrow y_d(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , ó  $x_1(t) \rightarrow y_d(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . La dinámica interna está dada por la segunda ecuación que queda,  $\dot{x}_2 = u = -x_2 + \dot{y}_d + (y_d - y)$ , de donde,

$$\dot{x}_2 + x_2 = \dot{y}_d + e ,$$

como el segundo miembro es acotado, entonces  $x_2$  y por tanto  $u$  son acotados. Sin embargo, si el modelo fuera

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -u \\ y &= x_1 \end{aligned} ,$$

la dinámica interna estaría dada por  $\dot{x}_2 - x_2 = \dot{y}_d + e$ , como el segundo miembro es acotado, entonces  $x_2$  y por tanto  $u$  no son acotados. Por lo que si bien la salida sigue perfectamente la referencia, el controlador en su conjunto no podría ser utilizado.

Un análisis en el plano de Laplace de cada caso indica que las F. de T. son

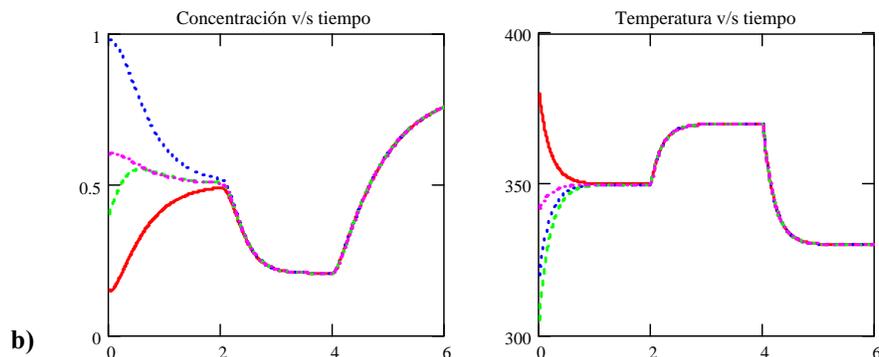
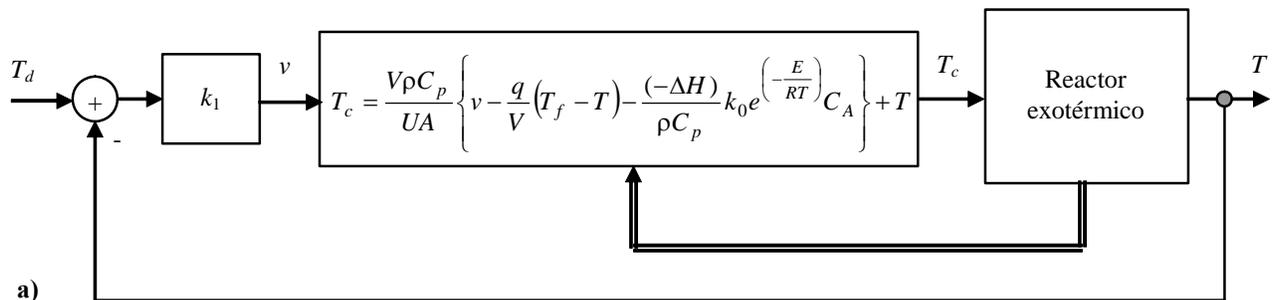


Fig. 6.4 Reactor con control entrada-salida; a) diagrama de control, b) respuesta dinámica.

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s+1}{s^2} \quad \text{y} \quad \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{s-1}{s^2},$$

respectivamente. Lo que revela que el primer caso corresponde a un sistema mínimo de fase y el segundo a uno no-mínimo de fase. Es decir, la localización de los ceros define la estabilidad de los sistemas lineales. En sistemas no-lineales no se tiene el concepto de cero, pues éstos son una propiedad intrínseca de los sistemas lineales; sin embargo, se tiene el concepto de dinámica cero.

## E . Las Dinámicas Cero.

**Def.:** Se define dinámica cero a la dinámica interna de un sistema cuando la entrada es tal que la salida es nula.

Por ejemplo, en el caso,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 + u \\ \dot{x}_2 &= u \quad , \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

para tener  $y = 0$ , se debe tener  $x_1 = 0$ , y por tanto su derivada, con lo que la entrada requerida es  $u = -x_2^3$  con lo que la dinámica resultante, que en este caso se denomina dinámica cero, es  $\dot{x}_2 = -x_2^3$  que se puede escribir como,

$$\dot{x}_2 + x_2^3 = 0,$$

que es asintóticamente estable. Similarmente, en el caso de que el modelo sea,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^3 + u \\ \dot{x}_2 &= -u \quad , \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

la dinámica cero resulta ser,

$$\dot{x}_2 - x_2^3 = 0,$$

que es inestable. Se puede observar que la dinámica cero es una propiedad de los sistemas que es extendible a sistemas no-lineales. Se puede demostrar que en sistemas lineales los polos de la dinámica cero son los ceros del sistema, por lo que si éstos están en el S.P.I. se garantiza que la dinámica cero es asintóticamente estable.

La utilidad de estudiar dinámicas cero es por su extensión a las dinámicas internas. En sistemas lineales la estabilidad de la dinámica cero implica la estabilidad global de la dinámica interna. En sistemas no-lineales, esta relación no es directa. Se adelanta que la estabilidad asintótica local de la dinámica cero de sistemas no-lineales es suficiente para garantizar la estabilidad asintótica local de las dinámicas internas.

En resumen la linealización entrada-salida se logra en tres pasos: a) derivar la salida hasta que la entrada  $u$  aparece, b) obtener  $u$  de manera de eliminar las no-linealidades, y c) estudiar la estabilidad de las dinámicas internas.

## 6.2 Herramientas Matemáticas.

**Def.:** Un mapeo  $\mathbf{f}: D \rightarrow R^n$ , donde  $D \subset R^n$  es un dominio, se dice un campo vectorial en  $D$ . Un campo vectorial es un vector columna  $n$ -dimensional.

**Def.:** La transpuesta de un campo vectorial se dice un campo co-vectorial. Un campo co-vectorial es una fila  $n$ -dimensional.

**Def.:** Si  $\mathbf{f}$  es un campo vectorial y  $\mathbf{w}$  un campo co-vectorial, entonces el producto punto  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{f} \rangle$  es definido como  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{f} \rangle = \mathbf{w}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(x)f_i(x)$ .

**Def.:** Sea  $h: D \rightarrow R$ . El diferencial o gradiente de  $h$  es un campo co-vectorial, definido por,

$$dh = \nabla h = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \left[ \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right].$$

**Def.:** Sea  $\mathbf{f}: D \rightarrow R^n$ . La matriz Jacobiano del campo vectorial  $\mathbf{f}$  esta definido por,  $\nabla \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ , con

$$\nabla \mathbf{f}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

**Def.:** Sea  $h: D \rightarrow R$  y  $\mathbf{f}: D \rightarrow R^n$ . La derivada lie de  $h$  con respecto de  $\mathbf{f}$ , que se denota por  $L_{\mathbf{f}}h$ , es una función escalar definida por,  $L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x}) = \nabla h \mathbf{f} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ .

Notar que,  $L_{\mathbf{f}}^2 h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}} h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}h) = \nabla(L_{\mathbf{f}}h)\mathbf{f} = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ , por otro lado se tiene que  $L_{\mathbf{f}}^3 h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}} h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}h)) = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}^2 h) = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^2 h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ , por lo que en general,  $L_{\mathbf{f}}^k h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}}^{k-1} h = \frac{\partial(L_{\mathbf{f}}^{k-1} h)}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ , para  $k = 1, 2, \dots$  y con  $L_{\mathbf{f}}^0 h = h$ . Además,  $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = \nabla(L_{\mathbf{f}}h)\mathbf{g}$ .

**Def.:** Sean  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  dos campos vectoriales en  $R^n$ . Se define el paréntesis lie de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  al vector dado por  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g}$ .

Notar que,  $ad_{\mathbf{f}}^0 \mathbf{g} = \mathbf{g}$ ,  $ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ ,  $ad_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} = ad_{\mathbf{f}} ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}} \mathbf{g}]$ ,  $ad_{\mathbf{f}}^k \mathbf{g} = [\mathbf{f}, ad_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}]$ , para  $k = 1, 2, \dots$

**Ejemplo 6.3.** Sean los campos  $\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix}$ ,  $h(x) = x_1^2 + x_2^2$ , y  $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix}$ , determine  $L_{\mathbf{f}}h$ ,  $L_{\mathbf{f}}^2h$ ,  $L_{\mathbf{g}}h$ ,  $L_{\mathbf{g}}^2h$ ,  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ , y  $[\mathbf{g}, \mathbf{f}]$ . **R.:**  $L_{\mathbf{f}}h = \nabla h \mathbf{f} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = [2x_1 \ 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix} = 2x_1x_2 - \sin x_1 - x_2$ .  $L_{\mathbf{f}}^2h = L_{\mathbf{f}}(L_{\mathbf{f}}h) = [2x_2 - \cos(x_1) \ 2x_1 - 1] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix} = (2x_2 - \cos(x_1))x_2 + (2x_1 - 1)(-\sin(x_1) - x_2)$ .  $L_{\mathbf{g}}h = \nabla h \mathbf{g} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g} = [2x_1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1$ .  $L_{\mathbf{g}}^2h = L_{\mathbf{g}}(L_{\mathbf{g}}h) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix} = x_2$ .  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x_1) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ .  $[\mathbf{g}, \mathbf{f}] = \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} - \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} = -[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ . ♣

Algunas propiedades del paréntesis Lie son,

- Bilinealidad,  $[\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2, \mathbf{g}] = \alpha_1 [\mathbf{f}_1, \mathbf{g}] + \alpha_2 [\mathbf{f}_2, \mathbf{g}]$ ,  $[\mathbf{f}, \alpha_1 \mathbf{g}_1 + \alpha_2 \mathbf{g}_2] = \alpha_1 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1] + \alpha_2 [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]$ .
- Conmutatividad Skew,  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}]$ .
- Identidad de Jacobi,  $L_{[\mathbf{f}, \mathbf{g}]}h = L_{\mathbf{f}}L_{\mathbf{g}}h - L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h$ .
- Notar además que si  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son constantes, entonces  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \mathbf{0}$ .

**Def.:** Un mapeo  $\mathbf{z}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio, es un difeomorfismo en  $D$  si es invertible en  $D$  (e.d., existe una función  $\mathbf{z}^{-1}$  tal que  $\mathbf{z}^{-1}(\mathbf{z}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ ) para todo  $\mathbf{x} \in D$  y ambas,  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{z}^{-1}$ , son continuamente diferenciables. Si la matriz Jacobiano  $\partial \mathbf{z} / \partial \mathbf{x}$  es no-singular en un punto  $\mathbf{x}_0 \in D$ , entonces hay una vecindad  $\Omega$  alrededor de  $\mathbf{x}_0$  tal que  $\mathbf{z}$  en  $\Omega$  es un difeomorfismo. Una función  $\mathbf{z}$  es un difeomorfismo global si y solo si:

- $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{z}$  es no singular  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , y
- $\mathbf{z}$  es propio; es decir,  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(\mathbf{x})\| = \infty$ .

**Ejemplo 6.4.** Determinar si  $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 5x_1x_2^2 \\ 3\sin(x_2) \end{bmatrix}$  es un difeomorfismo. **R.:** Al tomar  $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 + 5x_2^2 & 10x_1x_2 \\ 0 & 3\cos(x_2) \end{bmatrix}$  se tiene

que su rango es 2 alrededor del origen por lo que es no-singular en ese entorno. Por lo tanto,  $\mathbf{z}(\mathbf{x})$  es un difeomorfismo alrededor del origen, faltaría encontrar  $\mathbf{z}^{-1}(\mathbf{x})$ . ♣

**Def.:** Un set linealmente independientes de vectores de campo  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$  en  $D$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio, es integrable completamente si existen  $n - m$  funciones escalares  $h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_{n-m}(\mathbf{x})$  que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

- $\nabla h_i \mathbf{f}_j = 0$ , donde  $1 \leq i \leq n - m$ ,  $1 \leq j \leq m$ , y
- los gradientes  $\nabla h_i$  son linealmente independientes.

**Def.:** Un conjunto de vectores de campo linealmente independientes  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$  en  $D$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio, es involutivo si y solo si hay funciones escalares  $\alpha_{ijk}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que,

$$[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(\mathbf{x}) \mathbf{f}_k(\mathbf{x}), \quad \forall i, j \text{ tal que } 1 \leq i, j \leq m$$

En otras palabras, sí y solo sí  $[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j]$  es combinación lineal del conjunto original.

Notar que:

- i) Vectores de campo constantes son involutivos, puesto que  $[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j]$  es siempre cero y el  $\mathbf{0}$  puede ser siempre expresado como combinación lineal del conjunto.
- ii) Un conjunto  $\{\mathbf{f}\}$  de un único vector de campo es involutivo dado que  $[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = \nabla \mathbf{f} \mathbf{f} - \mathbf{f} \nabla \mathbf{f} = \mathbf{0}$  y el  $\mathbf{0}$  puede ser siempre expresado como combinación lineal del conjunto.
- iii) Para verificar si un conjunto es involutivo, se verifica que  $\text{rango}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\} = \text{rango}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m, [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j]\} \forall i, j$ .

**Teorema: Teorema de Frobenius.** Sea  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m\}$  un conjunto de campos vectoriales linealmente independiente, el conjunto es completamente integrable sí y solo sí es involutivo.

**Ejemplo 6.5.** Determinar si las ecuaciones

$$4x_3^3 \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$$

$$-x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + (x_3^2 - 3x_2) \frac{\partial h}{\partial x_2} + 2x_3 \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0$$

tienen solución. **R.:** En este caso se tiene el conjunto  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ , con  $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_3^2 - 3x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$  y por tanto las ecuaciones

se pueden escribir como  $\nabla h_i \mathbf{f}_j = 0$ , donde  $1 \leq i \leq n - m = 3 - 2 = 1$ ,  $1 \leq j \leq m = 2$ . Para ver si existe  $h$  (o el conjunto es completamente integrable), se debe verificar si es involutivo. Para esto se calcula,

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x} \mathbf{f}_1 - \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x_3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_3^2 - 3x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4x_3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x_3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

por lo tanto  $[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2]$  es l.d. y por consiguiente  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$  es involutivo y finalmente las ecuaciones son solucionables. ♣

### 6.3 Linealización de los Estados de Entrada.

**Def.:** Un sistema no-lineal (con una entrada) de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ , con  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  vectores de campo suaves en  $R^n$ , es linealizable en los estados de entrada si existe una región  $\Omega$  en  $R^n$ , un difeomorfismo  $\mathbf{z}: \Omega \rightarrow R^n$ , y una ley de control no-lineal realimentada  $u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$  tal que las nuevas variables de estado  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$  y la nueva entrada  $v$  satisfacen la relación lineal invariante en el tiempo  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v$  donde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El nuevo estado  $\mathbf{z}$  se conoce como estado linealizante, y la ley de control  $u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})v$  se conoce como ley de control linealizante.

La definición se ajusta a la idea intuitiva de linealización; sin embargo, cómo encontrar el difeomorfismo no está indicado. Esto se analiza a continuación.

### A . Condiciones para la Linealización de los Estados de Entrada.

**Teorema:** El sistema no-lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ , con  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  vectores de campo suaves en  $R^n$ , es linealizable en las variables de estado de entrada si y solo si existe una región  $\Omega$  tal que se cumplen las siguientes condiciones,

- Los vectores de campo  $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{n-1} \mathbf{g}\}$  son linealmente independientes en  $\Omega$ .
- El conjunto  $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{n-2} \mathbf{g}\}$  es involutivo en  $\Omega$ .

Nota: La primera condición es equivalente a la condición de controlabilidad en sistemas lineales, esto dado que  $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{n-1} \mathbf{g}\} = \{\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b}\}$  en sistemas lineales. La segunda condición no tiene equivalente directo en sistemas lineales.

### B . Metodología para implementar la linealización.

Los pasos a seguir son:

- i) Construir el vector de campos  $\{\mathbf{g}, ad_f \mathbf{g}, \dots, ad_f^{n-1} \mathbf{g}\}$ .
- ii) Chequear que el conjunto es linealmente independiente y es involutivo.
- iii) Si ambas condiciones se cumplen, encontrar  $z_1$  de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \nabla_{z_1} ad_f^i \mathbf{g} &= 0, \quad i = 0, \dots, n - 2 \\ \nabla_{z_1} ad_f^{n-1} \mathbf{g} &\neq 0 \end{aligned},$$

si la segunda ecuación se hace igual a 1, ambas ecuaciones se pueden escribir como,

$$[ad_f^0 \mathbf{g} \quad ad_f^1 \mathbf{g} \quad \dots \quad ad_f^{n-2} \mathbf{g} \quad ad_f^{n-1} \mathbf{g}] \begin{bmatrix} \partial_{z_1} / \partial x_1 \\ \partial_{z_1} / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial_{z_1} / \partial x_{n-1} \\ \partial_{z_1} / \partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

iv) Calcular la transformación de estado  $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = [z_1 \ L_f z_1 \ \dots \ L_f^{n-1} z_1]^T$  y la transformación de entrada como,

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1}, \beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} \phi_1}.$$

**Ejemplo 6.6.** Dado el sistema,  $\dot{x}_1 = a \text{sen}(x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$ , determine si es linealizable en las variables de entrada, en el caso de serlo, determine la ley de control linealizante. **R.:** Este sistema de ecuaciones de segundo orden ( $n = 2$ ) se puede escribir como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ , donde los vectores de campo son  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a \text{sen}(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Los pasos son: (1)

el conjunto es  $\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}\}$ , por lo que se determina solamente  $\text{ad}_f \mathbf{g} = \mathbf{L}_f \mathbf{g} = \nabla \mathbf{g} \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = -\nabla \mathbf{f} \mathbf{g} = -\begin{bmatrix} 0 & a \cos(x_2) \\ -2x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \cos(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$ , (2) el rango del conjunto  $\{\mathbf{g}, \text{ad}_f \mathbf{g}\}$  es  $\text{rango} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -a \cos(x_2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = 2$ , excepto para  $\cos(x_2) = 0$ , por lo que el

conjunto es l.i. y además el conjunto  $\{\mathbf{g}\}$  es siempre involutivo, (3)  $\begin{bmatrix} 0 & -a \cos(x_2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial z_1 / \partial x_1 \\ \partial z_1 / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , de donde  $\frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0$  y

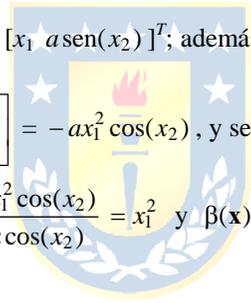
$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = 1$ , por lo que  $z_1 = x_1$ , es una solución, (4) como  $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = [z_1 \ L_f z_1]^T$ , entonces se necesita  $L_f z_1$  que es  $L_f z_1 = \nabla z_1 \mathbf{f} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \text{sen}(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} = a \text{sen}(x_2)$ , por lo que  $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = [x_1 \ a \text{sen}(x_2)]^T$ ; además,  $\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_f^2 z_1}{L_g L_f z_1}$ , por lo que se necesita  $L_f^2 z_1 =$

$L_f(L_f z_1) = \nabla(L_f z_1) \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & a \cos(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \text{sen}(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} = -ax_1^2 \cos(x_2)$ , y se necesita  $L_g L_f z_1 = \nabla(L_f z_1) \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & a \cos(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= a \cos(x_2)$ , con lo que  $\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_f^2 z_1}{L_g L_f z_1} = -\frac{ax_1^2 \cos(x_2)}{a \cos(x_2)} = -x_1^2$  y  $\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f z_1} = \frac{1}{a \cos(x_2)}$ . El diagrama resultante se

muestra en la Fig. 6.5. ♣



Este último ejemplo muestra en forma clara que se obtiene una linealización de los estados y que ahora se está en condiciones de diseñar una ley de control lineal para lograr los objetivos de control final. Sin embargo, debe destacarse que los objetivos se logran respecto del nuevo set de variables de estado  $\mathbf{z}$  que eventualmente no tienen significado físico.

### C . Diseño de Controladores para Linealización de Estados de Entrada.

Notar que:

i) El modelo equivalente es  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v$ , o escrito por componentes  $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n,$

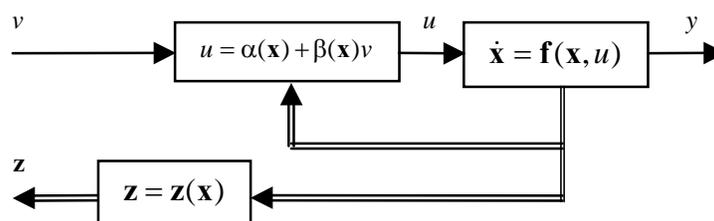


Fig. 6.5 Linealización de estados de entrada del Ejemplo 6.6.

$\dot{z}_n = v$ , que es equivalente a  $z_1^{(n)} = v$ .

ii) Solo hay una entrada que es  $v$  y sólo hay una salida por controlar como máximo que es  $z_1$ .

Por lo tanto se pueden dar dos casos, primero, si  $z_{d1}$  es la consigna para  $z_1$ , entonces la entrada se puede tomar como,

$$v = z_{d1}^{(n)} + a_{n-1}(z_{d1}^{(n-1)} - z_1^{(n-1)}) + \dots + a_1(\dot{z}_{d1} - \dot{z}_1) + a_0(z_{d1} - z_1),$$

si se define el error  $z_{d1} - z_1 = e_1$ , se tiene que,

$$e_1^{(n)} + a_{n-1}e_1^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{e}_1 + a_0e_1 = 0,$$

por lo que los coeficientes  $a_0, \dots, a_{n-1}$  son escogidos para asegurar estabilidad exponencial de la expresión anterior, con lo que se asegura que el error tiende a cero exponencialmente.

Un segundo caso corresponde al clásico diseño de un controlador de estados donde la entrada  $v$  se escoge de manera de re-ubicar los polos del sistema, en este caso la entrada  $v$  queda como,

$$v = u_{ex} - \mathbf{kz} = u_{ex} - k_0z_1 - k_1z_2 - \dots - k_{n-1}z_n,$$

donde en un segundo paso se puede diseñar un controlador para lograr objetivos adicionales de control. Por supuesto, un controlador de estados en conjunto con un controlador integrador también puede ser utilizado.

## 6.4 Linealización de Entrada-Salida.

El sistema que se estudia es  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ ,  $y = h(\mathbf{x})$ ; donde se desea que  $y$  dependa linealmente de una nueva entrada  $v$ . En particular se revisan tres aspectos: (a) cómo generar una relación lineal entrada-salida, (b) cuáles son las dinámicas internas y cero asociadas con la linealización, y (c) cómo diseñar controladores estables a partir de los resultados de la linealización.

### A. Generación de una Relación Lineal de Entrada-Salida.

En general se deriva la salida  $y$  hasta que la entrada  $u$  aparezca en la salida. Luego se diseña  $u$  de manera de eliminar las no-linealidades. Sin embargo, esto no es siempre posible; específicamente, cuando el sistema no tiene grado relativo bien definido.

**Sistemas con grado relativo definido.** El proceso de derivación sucesiva comienza con derivar la salida una vez, quedando,

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dh(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \nabla h(\mathbf{f} + \mathbf{g}u) = L_f h(\mathbf{x}) + L_g h(\mathbf{x})u,$$

la entrada  $u$  esta presente si  $L_g h(\mathbf{x}) \neq 0$ , si es cero se deriva nuevamente.

$$\ddot{y} = L_f^2 h(\mathbf{x}) + L_g L_f h(\mathbf{x})u,$$

en donde la entrada  $u$  esta en la ecuación si  $L_g L_f h(\mathbf{x}) \neq 0$ , si es cero se deriva una y otra vez hasta que aparezca. Si se asume que después de derivar  $r$  veces la salida, la entrada  $u$  aparece en la ecuación de la salida  $y$ , entonces se tiene que,

$$y^{(r)} = L_f^r h(\mathbf{x}) + L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})u, \quad (6.3)$$

con  $L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$  para algún  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  en  $\Omega_x$ , por lo que la ley de control  $u$  será,

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h} (-L_f^r h + v),$$

lo que resulta en la relación lineal  $y^{(r)} = v$ . Nótese que  $r$  es el grado relativo del sistema y que si se llega a que  $r = n$  entonces este procedimiento resulta ser el de linealización de estados.

**Def.:** El sistema definido por  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ ,  $y = h(\mathbf{x})$  tiene grado relativo  $r$  en una región  $\Omega$  si  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  se cumple que

- $L_g L_f^i h(\mathbf{x}) = 0$  con  $0 \leq i < r - 1$ , y
- $L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) \neq 0$ .

**Sistemas con grado relativo no-definido.** Se da cuando en la vecindad de  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in \Omega$  el coeficiente  $L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x}) = 0$ .

**Ejemplo 6.7.** Dado el sistema,  $\ddot{x} = \rho(x, \dot{x}) + u$ , estudie su grado relativo para  $y = x$  y para  $y = x^2$ . **R.:** Al derivar la salida se tiene que  $\dot{y} = \dot{x}$ , como la entrada no está presente, se deriva otra vez,  $\ddot{y} = \ddot{x} = \rho(x, \dot{x}) + u$ , por lo que  $r = 2$ . Para  $y = x^2$  se deriva la salida y se tiene  $\dot{y} = 2x\dot{x}$ , como la entrada no está presente, se deriva otra vez,  $\ddot{y} = 2(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) = 2\dot{x}^2 + 2x(\rho(x, \dot{x}) + u)$ , por lo que si el origen es el punto a estudiar se tendría para la vecindad de éste que  $\ddot{y} = 0$ , por lo que no se puede definir para ese punto  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  el grado relativo. ♣

## B. Formas Normales.

Cuando el grado relativo esta definido ( $r < n$ ) el sistema no-lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ ,  $y = h(\mathbf{x})$  se puede re-escribir usando  $y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}$  como parte de un nuevo conjunto de variables de estado, llamado forma normal. Sea  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r]^T = [y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}]^T$ , por lo que en una vecindad de  $\mathbf{x}_0$  en  $\Omega$  el sistema se puede representar por,

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_r \\ a(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi}) + b(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi})u \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi})$$

donde  $y = \mu_1$  y  $\boldsymbol{\Psi}$  es una función a encontrar. En la forma normal, las variables  $\mu_i$  y  $\psi_j$  se conocen como estados normales. Nótese que en la forma normal la expresión  $\dot{\boldsymbol{\Psi}}$  no contiene a la entrada  $u$ .

Para mostrar que el sistema no-lineal original puede ser transformado en la forma normal, debe existir la transformación para lo cual debe probarse que existe el difeomorfismo,

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = [\mu_1 \quad \dots \quad \mu_r \quad \psi_1 \quad \dots \quad \psi_{n-r}]^T, \tag{6.5}$$

de manera que se cumple (6.4). Para mostrar que (6.5) es un difeomorfismo es suficiente mostrar que su Jacobiano es invertible; es decir, que los gradientes  $\nabla \mu_i$  y  $\nabla \psi_j$  son l.i., lo cual se cumple si,

$$\nabla \psi_j(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \psi_j(\mathbf{x}) = 0.$$

**Ejemplo 6.8.** Dado el sistema,  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + e^{2x_2}u \\ 2x_1x_2 + \text{sen}(x_2) + 1/2u \\ 2x_2 \end{bmatrix}$ , con  $y = h(\mathbf{x}) = x_3$ , determine su forma normal. **R.:** Al

derivar la salida dos veces se tiene que se tiene que  $\dot{y} = \dot{x}_3 = 2x_2$ ,  $\ddot{y} = 2\dot{x}_2 = 4x_1x_2 + 2\text{sen}x_2 + u$ , por lo que  $r = 2$  y por

tanto  $\mu_1 = x_3$  y  $\mu_2 = 2x_2$ . Las funciones  $\Psi = [\psi_1]^T = \psi$  se obtiene de  $L_g\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2x_2} \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}e^{2x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0$ , donde una solución es  $\psi = 1 + x_1 - e^{2x_2}$ . Así la transformación  $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = [\mu_1 \dots \mu_r \psi_1 \dots \psi_{n-r}]^T$ , queda

como  $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = [\mu_1 \mu_2 \psi]^T$  y su Jacobiano como  $\frac{\partial\mathbf{z}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2e^{2x_2} & 0 \end{bmatrix}^T$  que es no-singular y por tanto la transformación

inversa es  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \psi + e^{\mu_2} \\ 1/2\mu_2 \\ \mu_1 \end{bmatrix}$ . Finalmente, con este nuevo conjunto de coordenadas se tiene la forma normal como,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ 2(-1 + \psi + e^{\mu_2}) + 2\text{sen}(\mu_2/2) + u \\ (1 - \psi - e^{\mu_2})(1 + 2\mu_2e^{\mu_2}) - 2\text{sen}(\mu_2/2)e^{\mu_2} \end{bmatrix}$$



### C. Las Dinámicas Cero

Una vez realizada la linealización entrada/salida, quedan internamente  $n - r$  dinámicas las cuales deben comportarse apropiadamente para un desempeño total tolerable. El análisis anterior muestra que las dinámicas asociadas con

$$\dot{\Psi} = \mathbf{w}(\boldsymbol{\mu}, \Psi), \tag{6.6}$$

de la forma normal corresponden a las dinámicas internas. En total son  $n - r$  ecuaciones y para su análisis se puede optar por analizar las dinámicas cero. Éstas corresponden a las dinámicas obtenidas de hacer cero la salida  $y$  y todas sus derivadas, lo que corresponde equivalentemente a tener  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$  en la ecuación anterior. Para tener al sistema operando en dinámica cero, el estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  debe estar en el espacio de soluciones (es decir, que se cumpla que  $\boldsymbol{\mu}(0) = \mathbf{0}$ ) y la entrada  $u = u_{d0}$  debe ser tal que las derivadas de  $y$  son cero o que  $y^{(r)}(t) = 0$ , lo que equivale de (6.3) a tener la entrada  $u_{d0}$ ,

$$u_{d0} = -\frac{L_f^r h(\mathbf{x})}{L_g L_f^{r-1} h(\mathbf{x})}. \tag{6.7}$$

Bajo estas condiciones se tiene el sistema resultante,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\mu}} &= \mathbf{0} \\ \dot{\Psi} &= \mathbf{w}(\mathbf{0}, \Psi) \end{aligned} \tag{6.8}$$

de donde la dinámica cero está dada por,

$$\dot{\Psi} = \mathbf{w}(\mathbf{0}, \Psi). \tag{6.9}$$

**Ejemplo 6.9.** En el ejemplo anterior se tiene la forma normal 
$$\begin{bmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ 2(-1 + \psi + e^{\mu_2}) + 2 \text{sen}(\mu_2 / 2) + u \\ (1 - \psi - e^{\mu_2})(1 + 2\mu_2 e^{\mu_2}) - 2 \text{sen}(\mu_2 / 2)e^{\mu_2} \end{bmatrix},$$

estudie la dinámica cero. **R.:** La dinámica cero está dada por  $\dot{\psi} = (1 - \psi - e^{\mu_2})(1 + 2\mu_2 e^{\mu_2}) - 2 \text{sen}(\mu_2 / 2)e^{\mu_2} \Big|_{\mu_1=\mu_2=0}$  lo que resulta en  $\dot{\psi} = -\psi$ , que es estable. ♣

Nota: Aquellos sistemas con dinámica cero estable se conocen como sistemas de fase mínima.

**Def.:** El sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ ,  $y = h(\mathbf{x})$  es *asintóticamente mínimo de fase* si su dinámica cero es asintóticamente estable.

Además, si el sistema es asintóticamente estable para cualquier  $\Psi(0)$  se dice globalmente asintóticamente mínimo de fase; de otra manera se dice que es localmente asintóticamente mínimo de fase.

### D. Estabilización Asintótica Local.

Como resultado de la linealización se tiene que  $y^{(r)} = v$ . Si se considera a  $v$  como

$$v = -a_0 y - a_1 \dot{y} - \dots - a_{r-1} y^{(r-1)},$$

donde los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ , escogidos de manera que el polinomio  $s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0$  tenga sus raíces en el S.P.I. se obtiene una ley de entrada dada por,

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1}} (-L_f^r y - a_{r-1} y^{(r-1)} - \dots - a_0 y). \tag{6.10}$$

La interrogante es si se puede asegurar la estabilidad de todo el sistema incluyendo las dinámicas internas. Para esto se tiene el siguiente teorema.

**Teorema:** Asumir que el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ ,  $y = h(\mathbf{x})$  tiene grado relativo  $r$  y su dinámica cero es localmente asintóticamente estable. Escoger  $a_i$  tal que el polinomio  $s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0$  tiene todas sus raíces estables, entonces la ley de control (6.10) asegura una estabilidad asintótica local del sistema L.C..

**Ejemplo 6.10.** Dado el sistema  $\dot{x}_1 = x_1^2 x_2$ ,  $\dot{x}_2 = 3x_2 + u$  determine mediante linealización entrada-salida una ley para la entrada  $u$  tal que el origen sea asintóticamente estable. **R.:** Dado que la salida no está especificada, ésta se considera como  $y = -2x_1 - x_2$  por lo que la derivada de  $y$  es  $\dot{y} = -2\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -2x_1^2 x_2 - 3x_2 - u$ , como la entrada está presente y la salida  $y$  ha sido derivada una vez, entonces  $r = 1$  y hay por tanto una dinámica interna. La dinámica cero es la obtenida al hacer  $y = 0$  con lo que se obtiene  $-2x_1 = x_2$  que al ser reemplazo en la primera ecuación de estado (la que no depende de  $u$ ) se obtiene la dinámica cero como  $\dot{x}_1 = -2x_1^3$ , que es asintóticamente estable, por lo que una ley de control como por ejemplo  $u = -2x_1^2 x_2 - 4x_2 - 2x_1$  estabiliza localmente el sistema no-lineal en torno al origen. Nótese que la ley de control elimina

la no-linealidad y además agrega términos de manera que la ecuación resultante es  $\dot{y} = x_2 + 2x_1 = -y$  que es asintóticamente estable. ♣

## E . Seguimiento de Sistemas de Fase Mínima.

El procedimiento de diseño de  $v$  para lograr estabilidad asintótica puede ser extendido al problema de control. Para esto se supone una salida deseada  $y_d$ , por tanto el vector,

$$\boldsymbol{\mu}_d = [y_d \quad \dot{y}_d \quad \dots \quad y_d^{(r-1)}]^T,$$

es conocido, y además se define el error como  $\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\mu}_d(t) - \boldsymbol{\mu}(t)$ . Ante este escenario se tiene el siguiente teorema,

**Teorema:** Asumir que el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$ ,  $y = h(\mathbf{x})$  tiene grado relativo  $r$ , que  $\boldsymbol{\mu}_d$  es suave y acotada, y que la solución  $\boldsymbol{\Psi}_d$  de la ecuación  $\dot{\boldsymbol{\Psi}}_d = \mathbf{w}(\boldsymbol{\mu}_d, \boldsymbol{\Psi}_d)$  con  $\boldsymbol{\Psi}_d(0) = \mathbf{0}$ , exista, sea acotada y es uniformemente asintóticamente estable. Escoger  $a_i$  tal que el polinomio  $s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_1s + a_0$  tenga raíces estrictamente estables. Entonces, al usar la ley de control,

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} \mu_1} \{-L_f^r \mu_1 + y_d^{(r)} + a_{r-1}e_r + \dots + a_0 e_0\},$$

el sistema completo permanece acotado y el error de seguimiento  $\mathbf{e}(t)$  converge a cero exponencialmente.

## F . Seguimiento de Sistemas de Fase No-mínima.

En este caso la ley de control no puede ser implementada puesto que las dinámicas internas son no-acotadas y por tanto el sistema resultante no es implementable. En este caso se recurre a obtener leyes de control que permitan generar errores de seguimiento pequeños pero que tengan dinámicas internas estables. Para esta alternativa hay tres métodos.

**Re-definición de la salida.** En este caso se define una nueva salida  $y_1 = h_1(\mathbf{x})$  de manera que esta definición genera dinámicas cero estables. La definición se realiza de manera que  $y_1$  sea aproximadamente igual a  $y$  en el rango de frecuencias de interés. Para entender este caso se revisa el caso lineal definido por la F. de T.,

$$y = \frac{(1 - s/b)n_o(s)}{d(s)} u,$$

donde  $n_o(s)$  y  $d(s)$  tienen raíces estables. Claramente la entrada no se puede definir para que la salida  $y$  siga una referencia  $y_d$  perfectamente, por la presencia del cero inestable (sistema de fase no-mínima) que requeriría una entrada inestable. Sin embargo, si se define una salida  $y_1$  como,

$$y_1 = \frac{n_o(s)}{d(s)} u,$$

la entrada  $u$  se puede definir sin problemas para que la salida  $y_1$  siga en forma perfecta una referencia  $y_d$  por lo que se tiene que  $y_1 = y_d$  y por tanto la salida original está dada por  $y = (1 - s/b)y_1 = (1 - s/b)y_d$  por lo que si la salida deseada  $y_d$  cambia lentamente, se tiene que se logra un error de seguimiento pequeño.

**Derivar  $n$  veces la salida.** En este caso se deriva la salida  $n$  veces sin importar si la entrada aparece en el intertanto. Con esto se logra un grado relativo  $n$  y por tanto no hay dinámicas internas. Por supuesto, esta aproximación es buena si los términos que acompañan a la entrada  $u$  son despreciables en los pasos intermedios.

**Re-definir la planta.** Si los casos anteriores no permiten lograr resultados satisfactorios se puede recurrir a cambios de la planta en estudio. Si bien esto parece drástico, puede estarse en presencia de un sistema mal diseñado y que por tanto se justifique un re-diseño. Por ejemplo, podría pensarse en un avión sin alas en un primer intento lo que no permitiría el diseño de una ley de control para estabilizarlo.

## 6.5 Sistemas MIMO.

Los conceptos de linealización de estados, de entrada-salida, dinámica interna y dinámica cero pueden ser extendidos a sistemas MIMO. Los sistemas a considerar son cuadrados es decir con igual número de entradas  $p$  y salidas  $q$  y de la forma,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

donde  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  es una matriz cuadrada de  $n \cdot p$  (ó  $n \cdot q$ ) y  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  es un campo vectorial  $R^n \rightarrow R^q$ .

### A. Linealización Mediante Realimentación.

En este caso se deriva cada salida tantas veces hasta que alguna entrada aparece. Se asume que  $r_i$  es el entero más pequeño que hace aparecer al menos una entrada en  $y_i^{(r_i)}$ , entonces,

$$y_i^{(r_i)} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i + \sum_{j=1}^p L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i u_j,$$

con  $L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i \neq 0$  para al menos un  $j$  en una vecindad  $\Omega_i$  del punto  $\mathbf{x}_0$ . La expresión anterior se repite para cada salida y los resultados se pueden agrupar en forma matricial en,

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} \\ \vdots \\ y_q^{(r_q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1 \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{r_q} h_q \end{bmatrix} + \mathbf{E}(\mathbf{x})\mathbf{u},$$

se define  $\Omega$  como la intersección de los  $\Omega_i$  y se asume que todos los grados relativos  $r_i$  están definidos, entonces  $\Omega$  es una vecindad de  $\mathbf{x}_0$ . Finalmente, si  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  es invertible, similarmente al caso SISO se puede definir la entrada  $\mathbf{u}$  como,

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}^{-1}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} v_1 - L_{\mathbf{f}}^{r_1} h_1 \\ \vdots \\ v_q - L_{\mathbf{f}}^{r_q} h_q \end{bmatrix},$$

lo que resulta en  $q$  ecuaciones del tipo,

$$y_i^{(r_i)} = v_i,$$

que corresponde a un sistema desacoplado por lo que la definición anterior de la entrada se conoce como ley de control desacopladora y la matriz  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  como la matriz desacopladora. Si este es el caso, el

sistema original  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$  tiene grado relativo  $(r_1, r_2, \dots, r_p)$  en  $\mathbf{x}_0$  y el escalar  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_p$  se denomina el grado relativo total del sistema en  $\mathbf{x}_0$ .

Un caso importante es cuando  $r = n$  en cuyo caso se logra el equivalente a linealización de estados y por tanto no hay dinámicas internas. La dinámica cero se puede definir también haciendo cero las salidas y sus derivadas. El concepto de sistema de fase mínima es igualmente aplicable.

## **B . Matriz Desacopladora No-Invertible.**

En aquellos casos en que la matriz  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  no es invertible se puede recurrir a dos caminos para lograr la linealización en sistemas MIMO. Estas son mediante la re-definición de las entradas y mediante la re-definición de las salidas. En el primer caso se opta por tomar como nuevas entradas a las derivadas de las entradas originales de manera que la matriz  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  sea invertible, luego se genera la entrada al sistema integrando la nueva entrada. En ambos casos se debe verificar la estabilidad de las dinámicas internas.



## Bibliografía.

- R. Dorf, “Modern Control Systems”, Addison-Wesley Publishing Comp. 1995, 7<sup>th</sup> edition.
- K. Furuta, A. Sano, and D. Atherton, “State Variable Methods in Automatic ...”, Wiley 1988.
- T. Glad and L. Ljung, “Control Theory, Multivariable and Nonlinear Me...”, Taylor&Francis. 2000.
- T. Kailath, “Linear Systems”, Prentice Hall 1980.
- E. Kreyszig, “Advanced Engineering Mathematics”, John Wiley & Sons 1993, 7th edition.
- B. Kuo, “Sistemas de Control Automático”, Prentice-Hall 1996, 7<sup>ma</sup> edición.
- J. Maciejowsky, “Multivariable Feedback Design”, Addison-Wesley Publishing Comp. 1990.
- M. Morari and E. Zafiriou, “Robust Process Control”, Prentice-Hall International, Inc. 1989.
- K. Ogata, “Ingeniería de Control Moderna”, Prentice-Hall 1993, 2<sup>da</sup> edición.
- W. Rugh, “Linear System Theory”, Prentice-Hall. 1996, 2<sup>nd</sup> edition.
- S. Skogestad and I. Postlethwaite, “Multivariable feedback control”, Wiley 1996.
- J.J. Slotine and W. Li \*, “Applied Nonlinear Control”, Prentice Hall 1991.
- A. Isidori \*, “Nonlinear Control Systems”, Springer 1996.
- H. Khalil \*, “Nonlinear Systems”, Prentice Hall 1996.
- M. Henson and D. Seborg \*, “Nonlinear Process Control”, Prentice Hall 1997.

Los textos marcados con \* están exclusivamente referidos a sistemas no-lineales, siendo el primero (Slotine) un texto guía para este curso.

## Índice Alfabético.

### A

asintóticamente mínimo de fase.....84

### C

campo co-vectorial.....76

campo vectorial.....76

canónica controlable.....69

caos.....4

ciclo límite.....10, 15, 16, 21

comportamiento local.....14

condición de Lipschitz.....38

conjunto invariante.....25

conjunto invariante global.....26

conjunto invariante local.....25

controlador robusto.....30

criterio de Nyquist.....49

### D

definida

negativa.....23

positiva.....22, 34

semi-definida negativa.....23

semi-definida positiva.....23

derivada lie.....76

difeomorfismo.....77

difeomorfismo global.....77

dinámica cero.....75, 83

dinámica interna.....73

dominio de atracción.....24, 26

### E

ejemplo

compensador.....6

estanque.....5

péndulo.....4

reactor.....5

estabilidad.....18, 32, 34

estabilidad asintótica.....18, 32

estabilidad asintótica global uniforme.....33

estabilidad asintótica uniforme.....33

estabilidad exponencial.....19, 32

estabilidad global.....19, 24, 33

estabilidad local.....23

estabilidad marginal.....19

estabilidad uniforme.....33, 34

estabilidad uniforme asintótica.....34

estabilidad uniforme asintótica global.....35

estado linealizante.....79

estados normales.....82

### F

fase mínima.....84

forma normal.....82

función descriptora.....43, 46

funciones de Lyapunov.....22

### G

ganancia programada.....62

gradiente.....76

grado relativo.....73, 82

grado relativo total.....87

### I

identidad de Jacobi.....77

integrable completamente.....77

involutivo.....77

isoclinas.....13

### L

lema de Barbalat.....39

ley de control desacopladora.....86

ley de control linealizante.....79

linealización.....19

### M

matriz definida positiva.....27

matriz desacopladora.....86

matriz Jacobiano.....76

mínimo de fase.....75

### N

no-mínimo de fase.....75

### P

paréntesis lie.....76

periódica.....10

periódica aislada.....10

plano de estados.....10

plano de fase.....10

producto punto.....76

punto

aislado.....8

equilibrio.....8

operación.....8

singular.....8

### R

regulador no-lineal.....29

### S

sistema autónomo.....8

sistemas perturbados.....37

### T

Teorema de Nyquist Extendido.....50

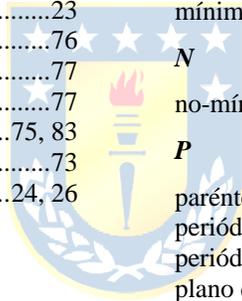
teorema de Silvester.....27

transformación de entrada.....70

transformación de estados.....70

### U

uniformemente continua.....40



**V**

variable programadora .....62  
velocidad de convergencia.....28

