

Red de Adelanto usando L.G.R.

Problema Ilustrar la utilización del L.G.R. para el diseño de un compensador en adelanto.

Parametros La planta sin el compensador, sólo un ganancia:

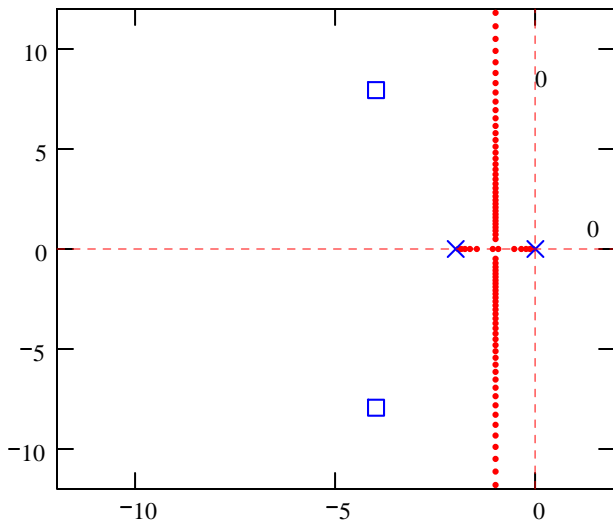
$$gr(s) = k_c \cdot \frac{1}{s \cdot (s + 2)} \quad s^2 + 2 \cdot s + k_c = 0 \quad n := 2$$

Se desea las raíces con,

$$\begin{aligned} \xi &:= 0.45 & \xi \omega_n &:= 4 & \omega_n &:= \frac{\xi \omega_n}{\xi} \\ p_1 &:= -\xi \omega_n + j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} & p_2 &:= -\xi \omega_n - j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned}$$

Solución A continuación se grafica el locus requerido.

$$\begin{aligned} j &:= 1 \dots n - 1 \quad C_{j+1,j} := 1 \quad \text{coeff}_p(k) := (k \ 2)^T \quad m := 1 \dots n \quad i_{\max} := 50 \quad i := 1 \dots i_{\max} \quad k_{\max} := 2.5 \quad k_i := \frac{i}{i_{\max}} \cdot k_{\max} \quad k_i := 10^{\left(\frac{i}{i_{\max}} \cdot k_{\max}\right) - 1} \\ R_p^{(i)} &:= \text{eigenvals}(\text{augment}(C, -\text{coeff}_p(k_i))) \quad Q_p(k) := \text{eigenvals}(\text{augment}(C, -\text{coeff}_p(k))) \quad k_{ol} := 0 \quad k_{cer} := 10^{10 \cdot k_{\max}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} p_1 &= -4 + 7.938i \\ p_2 &= -4 - 7.938i \end{aligned}$$

El compensador agrega un cero debajo de las raíces deseadas

$$h_c(s) = k_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_c}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T_c}} \quad T_c := \frac{1}{\xi \omega_n}$$

El compensador agrega un polo (p1) de manera que las raíces deseadas pertenezcan al L.G.R.

$$\text{ang}_{p1} + \text{ang}_{p2} + \text{ang}_{p3} - \text{ang}_{z1} = -180$$

$$\text{ang}_{p1} := -\pi - \left[\frac{\pi}{2} + \text{atan} \left[\frac{\xi \omega_n}{\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \right)} \right] \right] + \left[\frac{\pi}{2} + \text{atan} \left[\frac{\xi \omega_n - 2}{\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \right)} \right] \right] - \frac{\pi}{2} \quad \text{ang}_{p1} \cdot \frac{180}{\pi} = -310.885$$

$$\tan(\text{ang_p1}) = \frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{\frac{1}{\alpha \cdot T_c} - 4}$$

$$\alpha := \left(\frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{\tan(\text{ang_p1})} + 4 \right)^{-1} \cdot \frac{1}{T_c}$$

$$\alpha = 0.368$$

Parametros El sistema con el compensador

$$h_c(s) \cdot gr(s) = k_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_c}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T_c}} \cdot \frac{1}{s \cdot (s + 2)}$$

$$s^3 + \left(\frac{1}{\alpha \cdot T_c} + 2 \right) \cdot s^2 + \left(k_c + \frac{2}{\alpha \cdot T_c} \right) \cdot s + \frac{k_c}{T_c} = 0$$

$$n := 3$$

Solución A continuación se grafica el locus requerido.

$$j := 1 .. n - 1 \quad C_{j+1,j} := 1 \quad \text{coeff}_p(k) := \left(\frac{k}{T_c} \quad k + \frac{2}{\alpha \cdot T_c} \quad \frac{1}{\alpha \cdot T_c} + 2 \right)^T$$

$$m := 1 .. n$$

$$i_{\max} := 50$$

$$i := 1 .. i_{\max}$$

$$k_{\max} := 2.5$$

$$k_i := \frac{i}{i_{\max}} \cdot k_{\max} \quad k_i := 10 \left(\frac{i}{i_{\max}} \cdot k_{\max} \right)^{-1}$$

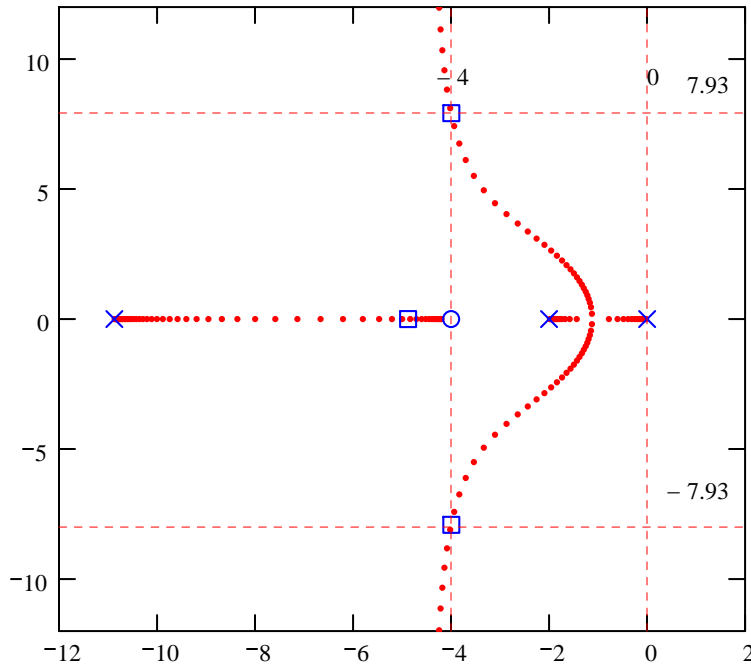
$$R_p^{(i)} := \text{eigenvals}(\text{augment}(C, -\text{coeff}_p(k_i)))$$

$$Q_p(k) := \text{eigenvals}(\text{augment}(C, -\text{coeff}_p(k)))$$

$$k_{ol} := 0$$

$$k_{cer} := 10 \cdot k_{\max}$$

$$k_c := 95.87$$



Nótese que las raíces imaginarias no son las dominantes. Por lo tanto, no debiera esperarse un sobre y tiempo de asentamiento a partir de las ecuaciones generales.

Red de Adelanto usando Diagrama de Bode

Problema Ilustrar la utilización del L.G.R. para el diseño de un compensador en adelanto.

Parámetros $n_{max} := 250$ $n := 1 .. n_{max}$ $f_{min} := 10^{-1}$ $f_{max} := 10^1$ $ratio := \log\left(\frac{f_{max}}{f_{min}}\right) \cdot \frac{1}{n_{max}}$

$frec(n) := f_{min} \cdot 10^{n \cdot ratio}$ $w(n) := 2 \cdot \pi \cdot frec(n)$ $s(n) := w(n) \cdot j$

$gr(s) = \frac{k_p}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 20)}$

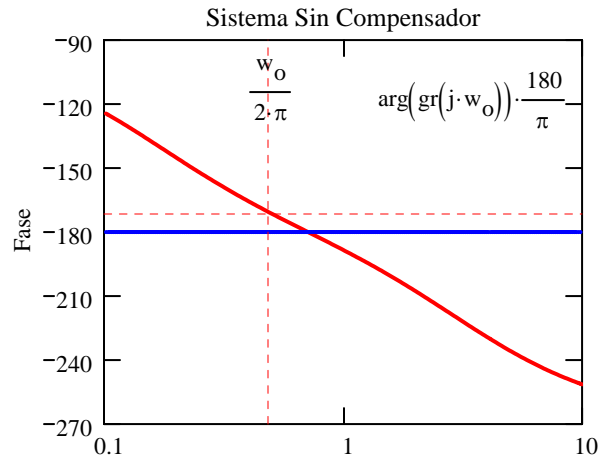
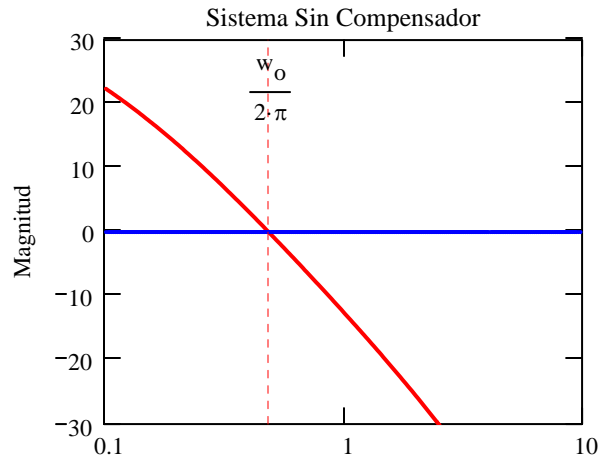
Se solicita: $e_{ss} := 0.10$ $MF_d := 30$ $e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot gr(s)}$ $k_p := \frac{1}{e_{ss}} \cdot 1 \cdot 20$

$gr(s) := \frac{k_p}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 20)}$ $M(n) := 20 \cdot \log(|gr(s(n))|)$ $P(n) := \frac{180}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \arg(s(n) \cdot gr(s(n)))\right)$

L.A. con Ganancia Apropia

MF

$w_1 := 10$ Given $|gr(j \cdot w_1)| = 1$ $w_o := \text{Find}(w_1)$ $MF := 180 + \arg(gr(j \cdot w_o)) \cdot \frac{180}{\pi}$ $MF = 9.353$



Red de Adelanto

Del gráfico de fase se lee:

$$MF_{LA} := MF$$

$$\phi_m := MF_d \cdot 1.10 - MF_{LA}$$

$$\phi_m = 23.647$$

$$\alpha := \frac{1 - \sin\left(\phi_m \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{1 + \sin\left(\phi_m \cdot \frac{\pi}{180}\right)}$$

$$\alpha = 0.427$$

$$gr(j \cdot 10) = -0.083 + 0.032i$$

$$h := 10 \cdot \log(\alpha)$$

$$h = -3.691$$

De la función $gr(s)$ se obtiene que,

$$w_1 := 1 \quad \text{Given} \quad 20 \cdot \log\left(\left|gr(j \cdot w_1)\right|\right) = h \quad w_o := \text{Find}(w_1)$$

$$\omega_m := w_o$$

$$\omega_m = 3.812$$

$$T_c := \left(\omega_m \cdot \sqrt{\alpha}\right)^{-1}$$

$$T_c = 0.401$$

$$k_c := \alpha^{-1}$$

$$k_c = 2.339$$

k_c se obtiene para no alterar la constante de error.

El compensador

$$k_c = 2.339$$

$$\frac{1}{T_c} = 2.492$$

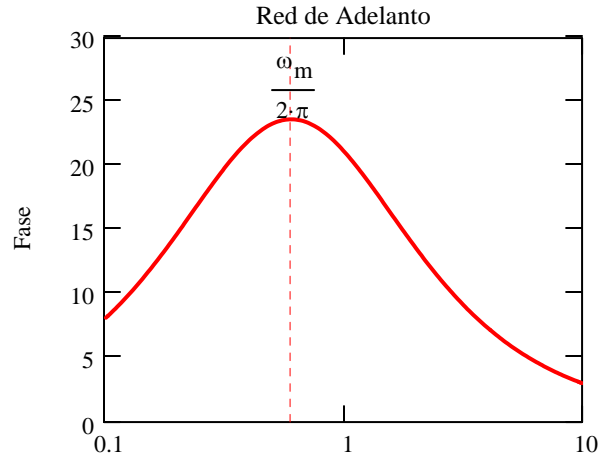
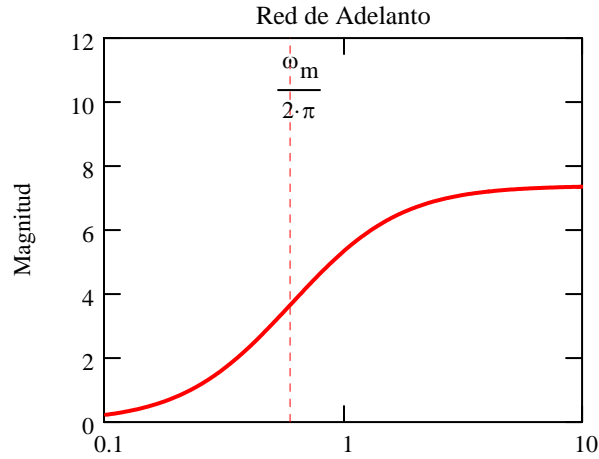
$$\frac{1}{\alpha \cdot T_c} = 5.831$$

$$h_c(s) := k_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_c}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T_c}}$$

$$M_c(n) := 20 \cdot \log\left(\left|h_c(s(n))\right|\right) \quad P_c(n) := \frac{180}{\pi} \cdot \left(\arg\left(h_c(s(n))\right)\right)$$

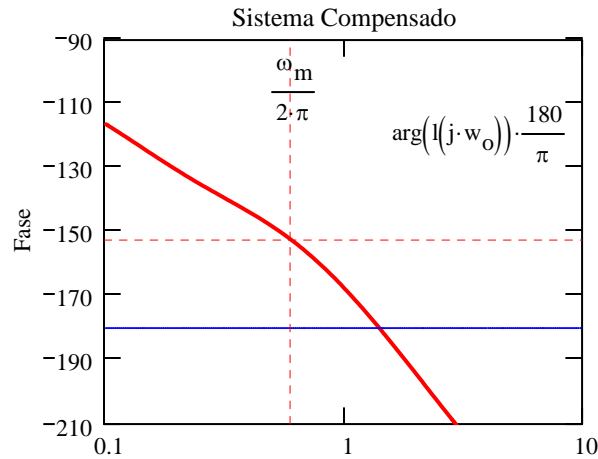
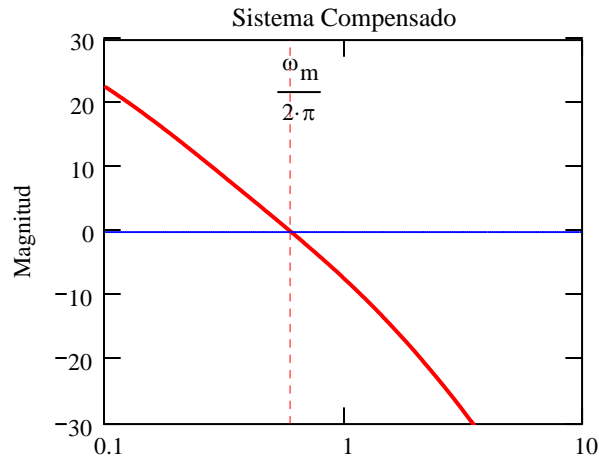
$$l(s) := \frac{200}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 20)} \cdot k_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_c}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T_c}}$$

$$M(n) := 20 \cdot \log(|l(s(n))|) \quad P(n) := \frac{180}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \arg(s(n) \cdot l(s(n))) \right)$$



MF

$$w_1 := 1 \quad \text{Given} \quad |l(j \cdot w_1)| = 1 \quad w_o := \text{Find}(w_1) \quad MF := 180 + \arg(l(j \cdot w_o)) \cdot \frac{180}{\pi} \quad MF = 27.554$$



El Diagrama de Bode permite diseñar el compensador en forma sencilla si la condición de ganancia (o error en estado estacionario) es apropiada. El MF obtenido es aproximado al deseado, esto se puede mejorar cambiando el factor de seguridad o bien planteando las ecuaciones generales a solucionar. Esto es, encontrar T_c de manera de lograr el MF deseado con el controlador (nótese que el cruce por 0 dB es para ω_m).

Problema Ubicación de las raíces del sistema de levitación magnética.

Parámetros

$$R := 1 \quad L := 50 \cdot 10^{-3} \quad g := 9.8 \quad K := 24.5 \quad l_1 := 0.5 \quad \Delta x_0 := 5 \cdot 10^{-2}$$

$$m := 0.250 \quad k_i := 3 \cdot 10^{-3} \quad a := 0.02 \quad d := 1.5 \quad l_0 := 0.3$$

Modelo.

$$\frac{d}{dt} i = \frac{e}{L} - \frac{R}{L} \cdot i \quad \frac{d}{dt} x = v \quad \frac{d}{dt} v = -g + \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i^2}{l_1 - x + a} + \frac{K}{m} \cdot (l_0 - x) - \frac{d}{m} \cdot v$$

Condiciones Iniciales y Entradas.

la corriente i_{f1} para tener la bola a 30 cm desde el piso en $t = 0$ es,

$$x_f := \frac{30}{100} \quad i_{f1} := \frac{1}{k_i} \cdot \sqrt{\left[k_i \cdot \left(g \cdot m \cdot l_1 - g \cdot m \cdot x_f + g \cdot m \cdot a + K \cdot x_f \cdot l_1 - K \cdot l_0 \cdot l_1 + K \cdot l_0 \cdot x_f - K \cdot l_0 \cdot a - K \cdot x_f^2 + K \cdot x_f \cdot a \right) \right]}$$

por lo que la tensión e_{f1} a aplicar es, las c.i. son entonces, $i_0 := i_{f1} \quad x_0 := x_f \quad v_0 := 0$

$$e_{f1} := i_{f1} \cdot R \quad e_{f1} = 13.404$$

Modelo Lineal

$$A := \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 \cdot \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0}{l_1 - x_0 + a} + \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0^2}{(l_1 - x_0 + a)^2} - \frac{K}{m} & \frac{-d}{m} & 0 \end{bmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i_o := i_0 \quad x_o := x_0$$

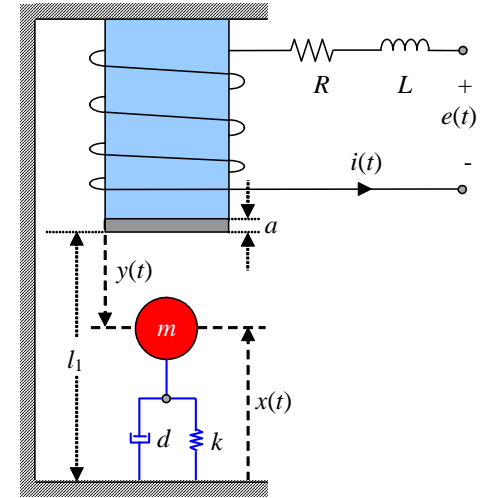
$$v_o := v_0 \quad e_o := e_{f1}$$

$$c := (0 \ 1 \ 0)$$

Funciones de Transferencia en L.A.

$$h_{xe}(s) := c \cdot (s \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \cdot b \quad \left| \begin{array}{l} \text{expand} \\ \text{float}, 10 \end{array} \right. \rightarrow \frac{29.24504620}{s^3 + 26.00000000 \cdot s^2 + 173.4545455 \cdot s + 1069.090909}$$

$$\text{polos :} \quad \text{pol} := \text{eigenvals}(A) \quad \text{pol}^T = (-3 + 6.667i \quad -3 - 6.667i \quad -20)$$



Variables de Estado

$$x_1 = i_a \quad x_2 = x \quad x_3 = \frac{d}{dt} x = v$$

$$\left(s + \frac{R}{L}\right) \cdot \left[s^2 + \frac{d}{m} \cdot s + \frac{K \cdot (1_1 - x_0 + a)^2 - k_1 \cdot i_0^2}{m \cdot (1_1 - x_0 + a)^2} \right]$$

Ecuación característica. Las raíces de segundo orden dan el tiempo de asentamiento y sobrepaso.

$$\omega_n := \sqrt{\frac{K \cdot (1_1 - x_0 + a)^2 - k_1 \cdot i_0^2}{m \cdot (1_1 - x_0 + a)^2}} \quad \xi := \frac{d}{m} \cdot \frac{1}{2 \cdot \omega_n} \quad \omega_n = 7.311 \quad \xi = 0.41 \quad \delta := 0.05$$

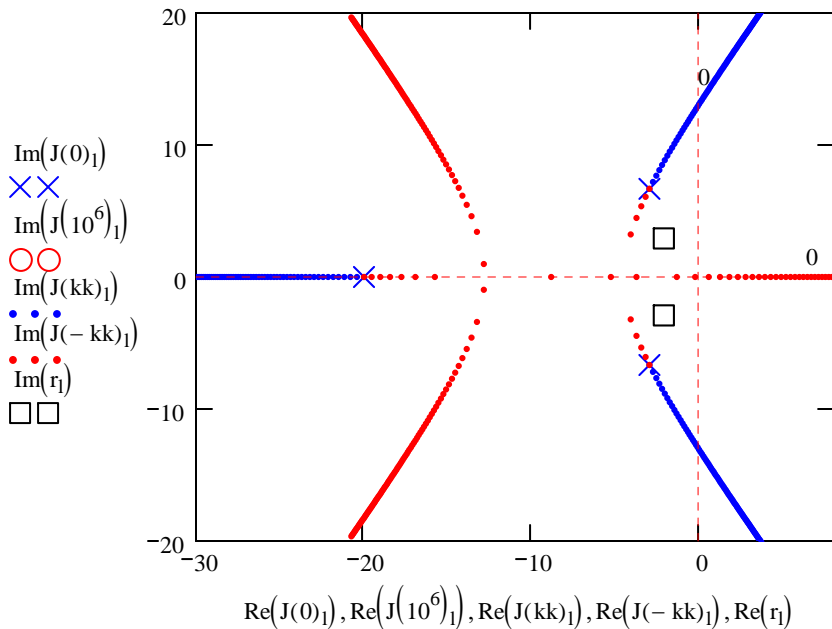
$$SP := e^{\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad SP = 0.243 \quad t_s := \ln\left(\frac{1}{\delta \cdot \sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot \frac{1}{\xi \cdot \omega_n} \quad t_s = 1.029$$

Si se desea un SP de 10% y un tiempo de asentamiento de 1.5 s, las raíces dominantes deberían estar en,

$$t_s := 1.5 \quad SP := 0.10 \quad \xi := \frac{-\ln(SP)}{\sqrt{\ln(SP)^2 + \pi^2}} \quad \xi = 0.591 \quad \omega_n := \ln\left(\frac{1}{\delta \cdot \sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot \frac{1}{\xi \cdot t_s} \quad \omega_n = 3.621 \quad r := \begin{pmatrix} -\xi \cdot \omega_n + i \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \\ -\xi \cdot \omega_n - i \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2} \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} -2.14 + 2.92i \\ -2.14 - 2.92i \end{pmatrix}$$

Si se utiliza un controlador con ganancia k_c se tienen las raíces en L.C. en,

$$A_T(k) := A - b \cdot k \cdot c \quad b_T(k) := b \cdot k \quad c_T := c \quad kk := 0, 5 \dots 470 \quad J(kk) := \text{eigenvals}(A_T(kk)) \quad l := 1 \dots 3$$



Los cuadrados representan las raíces deseadas.

Al colocar un integrador y luego un cero debajo de las raíces deseadas se genera un polo cercano al origen que redonda en una dinámica de primer orden y no como la deseada.

Se propone un controlador con un polo en el origen, dos ceros para cancelar los polos imaginarios y un segundo polo para dejar las raíces donde se desea. Así la F. de T. del controlador es,

$$h_c(s) := k_c \cdot \frac{s^2 + \frac{d}{m} \cdot s + \frac{K \cdot (1_1 - x_0 + a)^2 - k_i \cdot i_0^2}{m \cdot (1_1 - x_0 + a)^2}}{s \cdot (s + p_1)}$$

$$l(s) := k_c \cdot \frac{1}{s \cdot (s + p_1)} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \cdot \frac{2 \cdot k_i \cdot i_0}{(1_1 - x_0 + a) \cdot m \cdot L}$$

El polinomio característico en L.C. es $1+l(s)=0$ y se desea que se cumpla,

Las cantidades desconocidas son p_1 , p_2 y k_c . Éstas se obtienen al igualar los coeficientes de ambos polinomios.

$$s \cdot (s + p_1) \cdot \left(s + \frac{R}{L} \right) + k_c \cdot \frac{2 \cdot k_i \cdot i_0}{(1_1 - x_0 + a) \cdot m \cdot L} = (s + p_2) \cdot (s - r_1) \cdot (s - r_2)$$

$$s^3 + \frac{R + p_1 \cdot L}{L} \cdot s^2 + p_1 \cdot \frac{R}{L} \cdot s + k_c \cdot k_{cto} = s^3 + (p_2 - r_1 - r_2) \cdot s^2 + [-p_2 \cdot r_1 - (p_2 - r_1) \cdot r_2] \cdot s + p_2 \cdot r_1 \cdot r_2$$

$$\frac{R + p_1 \cdot L}{L} = p_2 - r_1 - r_2 \quad p_1 \cdot \frac{R}{L} = -p_2 \cdot r_1 - (p_2 - r_1) \cdot r_2 \quad k_c \cdot k_{cto} = p_2 \cdot r_1 \cdot r_2$$

$$k_{cto} := \frac{2 \cdot k_i \cdot i_0}{(1_1 - 1 \cdot x_0 + a) \cdot m \cdot L} \quad \text{Se define para simplicidad algebraica.}$$

$$p_1 := \frac{-R \cdot r_1 - R \cdot r_2 - r_2 \cdot L \cdot r_1 - L \cdot (r_1)^2 - (r_2)^2 \cdot L}{R + L \cdot r_1 + r_2 \cdot L} \quad p_1 = 5.115$$

Estas soluciones se obtienen simbólicamente.

$$p_2 := \frac{R^2 + R \cdot r_1 \cdot L + R \cdot r_2 \cdot L + r_2 \cdot L^2 \cdot r_1}{L \cdot (R + L \cdot r_1 + r_2 \cdot L)} \quad p_2 = 20.834$$

$$k_c := \frac{R^2 + R \cdot r_1 \cdot L + R \cdot r_2 \cdot L + r_2 \cdot L^2 \cdot r_1}{L \cdot (R + L \cdot r_1 + r_2 \cdot L)} \cdot r_1 \cdot \frac{r_2}{k_{cto}} \quad k_c = 9.34$$

El controlador $h_c(s)$ tiene dos polos y dos ceros. Su representación en variables de estado (sin ganancia) es,

$$b_0 := \frac{K \cdot (1_1 - x_0 + a)^2 - k_i \cdot i_0^2}{m \cdot (1_1 - x_0 + a)^2} \quad b_1 := \frac{d}{m} \quad b_2 := 1 \quad a_0 := 0 \quad a_1 := p_1 \quad A_c := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \quad b_c := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_c := (b_0 - a_0 \cdot b_2 \quad b_1 - a_1 \cdot b_2) \quad d_c := b_2$$

Funciones de Transferencia en L.C.

$$A_r(k) := \text{stack}(\text{augment}(A - b \cdot d_c \cdot c \cdot k, b \cdot k \cdot c_c), \text{augment}(-b_c \cdot c, A_c))$$

$$b_r(k) := \text{stack}(b \cdot d_c \cdot k, b_c)$$

$$c_r := \text{augment}(c, 0 \cdot c_c)$$

$$d_r := 0$$

$$h_{\text{xxd}}(s, k) := c_r(k) \cdot (s \cdot \text{identity}(5) - A_r(k))^{-1} \cdot b_r(k)$$

Polos en L.C. para k_c calculado.

polos : $\text{pol} := \text{eigenvals}(A_r(k_c))$ $\text{pol} = \begin{pmatrix} -20.834 \\ -3 - 6.667i \\ -3 + 6.667i \\ -2.14 - 2.92i \\ -2.14 + 2.92i \end{pmatrix}$

El sistema tiene los polos
deseados,

$$r_1 = -2.14 + 2.92i$$

$$r_2 = -2.14 - 2.92i$$

el polo real está muy alejado
y los otros polos son
cancelados con los ceros del
controlador.

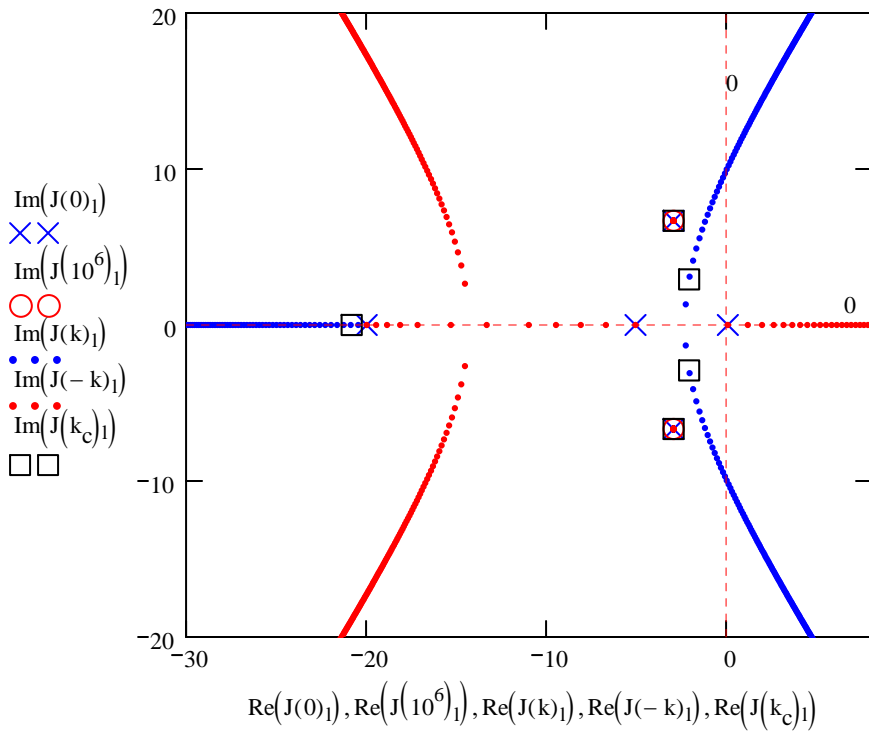
Se grafican los valores propios de A_r ; es decir, el L.G.R.

$$k := 0, 5 \dots 550$$

$$J(k) := \text{eigenvals}(A_r(k))$$

$$l := 1 \dots 5$$

$$n := 1 \dots 2$$

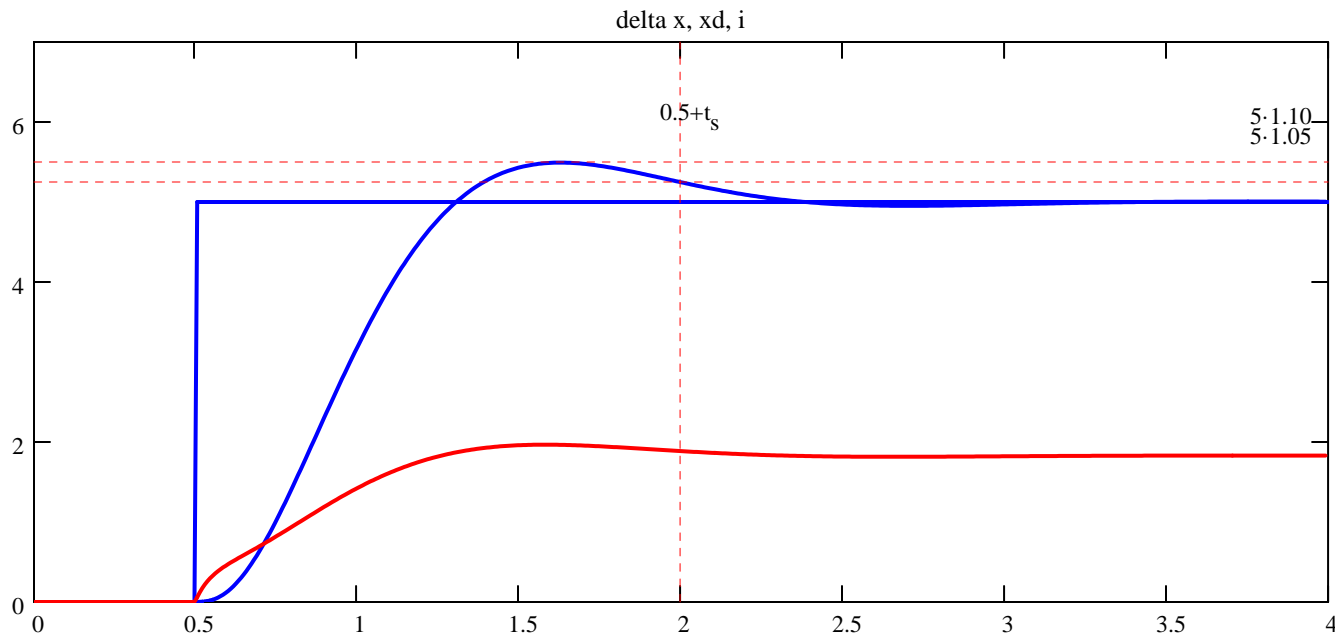


Simulación Sistema en L.C. de Posición.

$$t_f := 4 \quad l_f := 500 \quad ll := 0 .. l_f \quad t := 0, \frac{t_f}{l_f} .. t_f \quad \Delta x_d(t) := \Delta x_o \cdot \Phi(t - 0.5)$$

$$D(t, x) := \text{Re}(A_r(k_c)) \cdot (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T + \text{Re}(b_r(k_c)) \cdot \Delta x_d(t) \quad CI := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad Z_c := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, l_f, D)$$

$$v(ll) := k_c \cdot \left[\begin{array}{l} \text{augment}(c \cdot 0, c_c) \cdot \left((Z_{c_{ll,2}} \ Z_{c_{ll,3}} \ Z_{c_{ll,4}} \ Z_{c_{ll,5}} \ Z_{c_{ll,6}}) \right)^T \dots \\ + d_c \cdot \left(\Delta x_d \left(ll \cdot \frac{t_f}{l_f} \right) - c_r \cdot \left((Z_{c_{ll,2}} \ Z_{c_{ll,3}} \ Z_{c_{ll,4}} \ Z_{c_{ll,5}} \ Z_{c_{ll,6}}) \right)^T \right) \end{array} \right]$$



Red de Atraso usando L.G.R.

Problema Ilustrar la utilización del L.G.R. para el diseño de un compensador en adelanto.

Parametros La planta sin el compensador, sólo un ganancia:

$$\text{gr}(s) = k \cdot \frac{1}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 5)} \quad \text{pol. caract.} \quad s^3 + 6 \cdot s^2 + 5 \cdot s + k = 0 \quad n := 3$$

$$\text{pol. deseado} \quad \left(s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 \right) \cdot (s + p_1) \quad \text{con} \quad \xi := 0.45$$

$$s^3 + (2 \cdot \xi \cdot \omega_n + p_1) \cdot s^2 + (\omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p_1) \cdot s + \omega_n^2 \cdot p_1 = s^3 + 6 \cdot s^2 + 5 \cdot s + k \quad k := 2$$

Given

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n + p_1 = 6 \quad \omega_n^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p_1 = 5 \quad \omega_n^2 \cdot p_1 = k \quad \text{Sol} := \text{Find}(\omega_n, k, p_1) \quad \text{Sol}^T = (0.898 \quad 4.183 \quad 5.192)$$

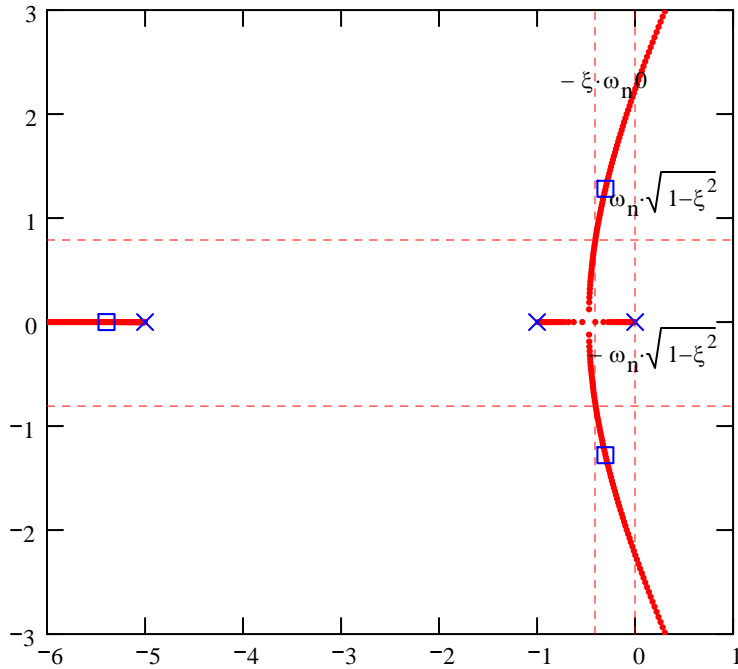
$$k := \text{Sol}_2 \quad \omega_n := \text{Sol}_1 \quad \xi \cdot \omega_n = 0.404 \quad \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = 0.802$$

$$k_v \text{ sin compoensador} \quad kv_{n_c} := \frac{k}{5} \quad kv_{n_c} = 0.837 \quad k_v \text{ no es suficiente}$$

Solución En continuación se grafica el locus requerido.

$$j := 1..n-1 \quad C_{j+1,j} := 1 \quad \text{coeff}_p(k) := (k \ 5 \ 6)^T \quad m := 1..n \quad i_{\max} := 100 \quad i := 1..i_{\max} \quad k_{\max} := 1.8 \quad k_i := \frac{i}{i_{\max}} \cdot k_{\max} \quad k_i := 10^{\left(\frac{i}{i_{\max}} \cdot k_{\max}\right) - 1} \cdot e^C - \text{DIE}$$

$$R_p^{(i)} := \text{eigenvals}(\text{augment}(C, -\text{coeff}_p(k_i))) \quad Q_p(k) := \text{eigenvals}(\text{augment}(C, -\text{coeff}_p(k))) \quad k_{ol} := 0 \quad k_{cer} := 10^{10 \cdot k_{\max}} \quad k_c := k_c$$



Diseño del compensador: $kv_{c_c} := 7$

Del locus se tiene: $kv_{n_c} = 0.837$

$$\alpha := \frac{kv_{c_c}}{kv_{n_c}} \quad \alpha = 8.367 \quad k_c := 1$$

El Parámetro T Por diseño: $\xi = 0.45$ $\omega_n = 0.898$ Restricción: $\Delta := 5 \cdot \frac{\pi}{180}$

$$a := \alpha \cdot \tan(\Delta) \cdot \omega_n^2 \quad b := \xi \cdot \omega_n \cdot (\alpha + 1) \cdot \tan(\Delta) + \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot (\alpha - 1) \quad c := \tan(\Delta)$$

$$T_c := \frac{b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad T_c = 0.014 \quad \frac{1}{T_c} = 71.184 \quad \frac{1}{\alpha \cdot T_c} = 8.508$$

$$T_c := \frac{b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad T_c = 10.56 \quad \frac{1}{T_c} = 0.095 \quad \frac{1}{\alpha \cdot T_c} = 0.011$$

La última solución es la correcta.

Con Compensador

$$gr(s) \cdot h_c(s) = k \cdot \frac{1}{s \cdot (s+1) \cdot (s+5)} \cdot k_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_c}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T_c}}$$

$$s^4 + \left(\frac{1}{\alpha \cdot T_c} + 6 \right) \cdot s^3 + \left(5 + \frac{6}{\alpha \cdot T_c} \right) \cdot s^2 + \left(\frac{5}{\alpha \cdot T_c} + k \cdot k_c \right) \cdot s + \frac{k \cdot k_c}{T_c} = 0 \quad n := 4$$

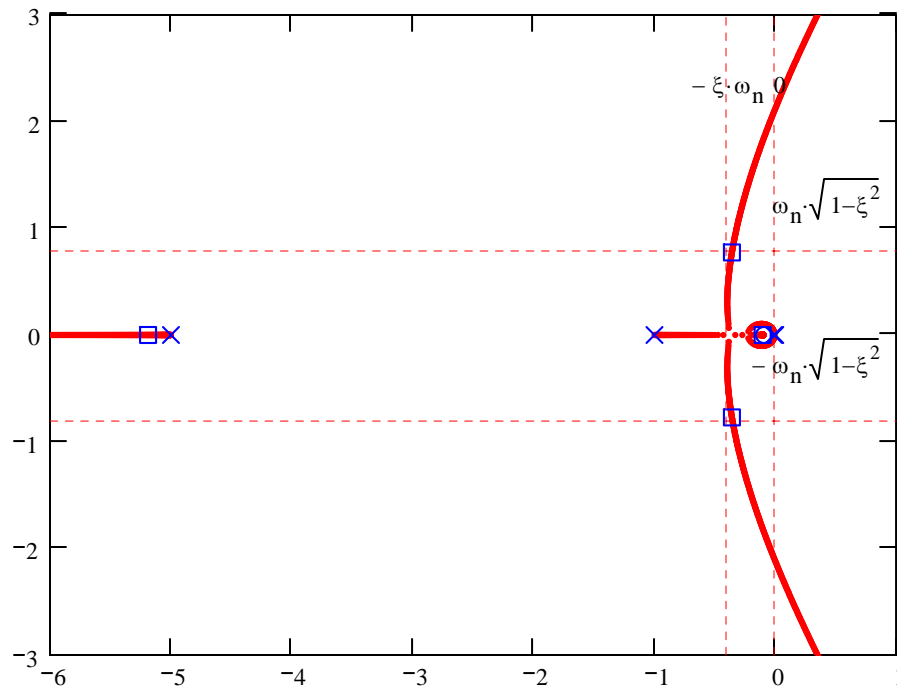
A continuación se grafica el locus requerido.

$$j := 1 .. n - 1 \quad C_{j+1,j} := 1 \quad \text{coeff}_p(k) := \left(\frac{k \cdot k_c}{T_c} \quad \frac{5}{\alpha \cdot T_c} + k \cdot k_c \quad 5 + \frac{6}{\alpha \cdot T_c} \quad \frac{1}{\alpha \cdot T_c} + 6 \right)^T$$

$$m := 1 .. n \quad i_{\max} := 500 \quad i := 1 .. i_{\max} \quad k_{\max} := 2 \quad k_i := 10 \left(\frac{i}{i_{\max}} \cdot k_{\max} \right) - 1$$

$$R_p^{(i)} := \text{eigenvals}(\text{augment}(C, -\text{coeff}_p(k_i))) \quad Q_p(k) := \text{eigenvals}(\text{augment}(C, -\text{coeff}_p(k)))$$

$$k_{ol} := 0 \quad k_{cer} := 10 \cdot k_{\max} \quad k_c := 4.183$$



El L.G.R. permite obtener la ubicación del compensador en forma sencilla si las condiciones dinámicas son posibles de obtener con el sistema sin compensador.

Red de Atraso usando Diagrama de Bode

Problema Ilustrar la utilización del L.G.R. para el diseño de un compensador en adelanto.

Parámetros $n_{\max} := 250$ $n := 1 .. n_{\max}$ $f_{\min} := 10^{-1}$ $f_{\max} := 10^2$ $\text{ratio} := \log\left(\frac{f_{\max}}{f_{\min}}\right) \cdot \frac{1}{n_{\max}}$

$\text{frec}(n) := f_{\min} \cdot 10^{n \cdot \text{ratio}}$ $w(n) := 2 \cdot \pi \cdot \text{frec}(n)$ $s(n) := w(n) \cdot j$ $\text{gr}(s) := \frac{2500}{s \cdot (s + 25)}$

$k_{v_{n_c}} := \frac{2500}{25}$ $\text{ess}_{n_c} := \frac{1}{k_{v_{n_c}}}$ $\text{ess}_{n_c} = 0.01$ **Se desea de,** $\text{ess}_{c_c} := 0.005$ $\text{MF}_d := 45$

$k_{v_{c_c}} := \frac{2500}{25} \cdot k_c \cdot \alpha$ $\text{ess}_{c_c} = \frac{1}{\frac{2500}{25} \cdot k_c \cdot \alpha}$ $k_c \cdot \alpha = \frac{1}{\text{ess}_{c_c} \cdot \frac{2500}{25}}$ $k_{c\alpha} := \frac{1}{\text{ess}_{c_c} \cdot \frac{2500}{25}}$ $k_{c\alpha} = 2$

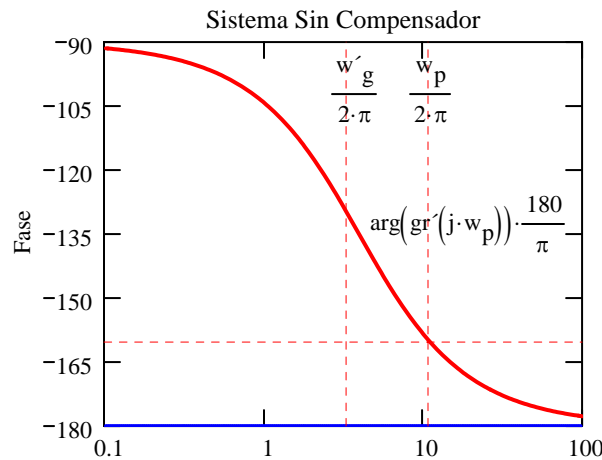
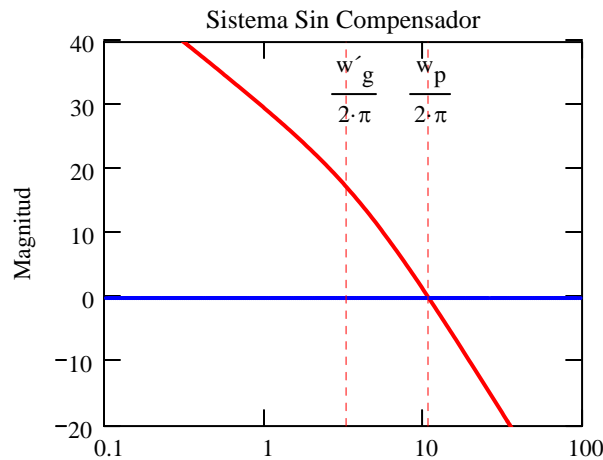
L.A. con Ganancia Aproporada $\text{gr}'(s) := \frac{2500 \cdot k_{c\alpha}}{s \cdot (s + 25)}$ $M(n) := 20 \cdot \log(|\text{gr}'(s(n))|)$ $P(n) := \frac{180}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \arg(s(n) \cdot \text{gr}'(s(n)))\right)$

MF

$w_1 := 10$ **Given** $|\text{gr}'(j \cdot w_1)| = 1$ $w_p := \text{Find}(w_1)$ $\text{MF} := 180 + \arg(\text{gr}'(j \cdot w_p)) \cdot \frac{180}{\pi}$ $\text{MF} = 20.04$
 $w_p = 68.537$

w'g

$w_1 := 0.10$ **Given** $180 + \left(-\frac{\pi}{2} + \arg(j \cdot w_1 \cdot \text{gr}'(j \cdot w_1))\right) \cdot \frac{180}{\pi} = \text{MF}_d + 5$ $w'_g := \text{Find}(w_1)$ $w'_g = 20.978$



Red de Atraso

Del gráfico de fase se lee:

$$\omega'_g := w'_g$$

$$T_c := \frac{10}{\omega'_g}$$

$$T_c = 0.477$$

Del gráfico de magnitud se lee:

$$at := 20 \cdot \log(|gr'(j \cdot w'_g)|)$$

$$at = 17.271$$

$$\alpha := 10^{\frac{at}{20}}$$

$$\alpha = 7.303$$

$$k_c := \frac{k_c \alpha}{\alpha}$$

$$k_c = 0.274$$

Plots

El compensador

$$k_c = 0.274$$

$$\frac{1}{T_c} = 2.098$$

$$\frac{1}{\alpha \cdot T_c} = 0.287$$

$$h_c(s) := k_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_c}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T_c}}$$

$$M_c(n) := 20 \cdot \log(|h_c(s(n))|)$$

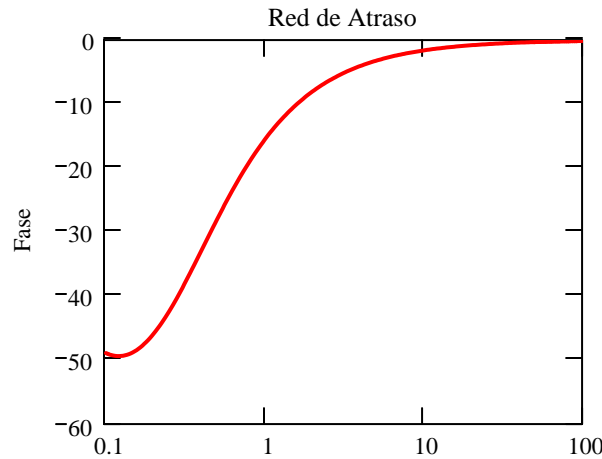
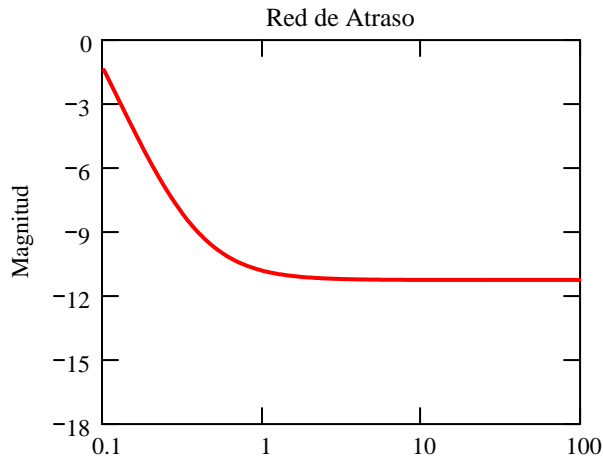
$$P_c(n) := \frac{180}{\pi} \cdot (\arg(h_c(s(n))))$$

El sistema completo

$$l(s) := \frac{2500}{s \cdot (s + 25)} \cdot k_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_c}}{s + \frac{1}{\alpha \cdot T_c}}$$

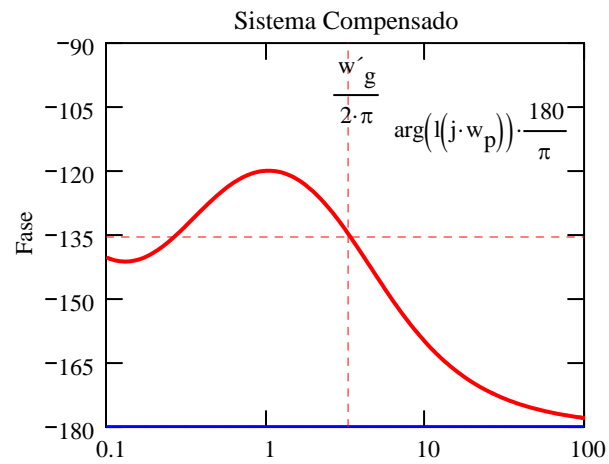
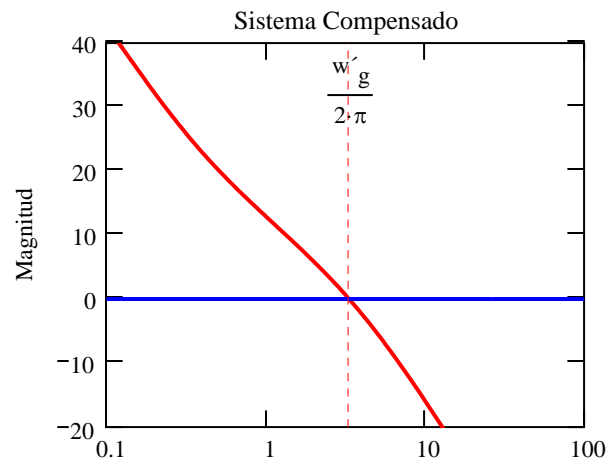
$$M(n) := 20 \cdot \log(|l(s(n))|)$$

$$P(n) := \frac{180}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + \arg(s(n) \cdot l(s(n))) \right)$$



MF

$$w_1 := 10 \quad \text{Given} \quad |l(j \cdot w_1)| = 1 \quad w_p := \text{Find}(w_1) \quad MF := 180 + \arg(l(j \cdot w_p)) \cdot \frac{180}{\pi} \quad MF = 44.994$$

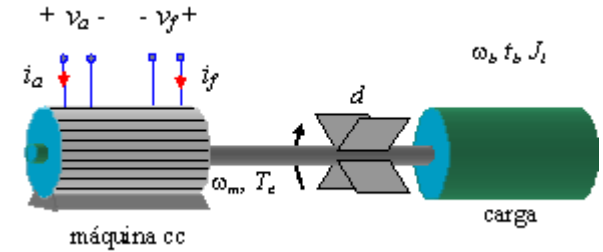


El Diagrama de Bode permite diseñar el compensador en forma sencilla si la condición de ganancia (o error en estado estacionario) es apropiada.

Red de 1er Orden Discreta

Problema Diseñar una red de 1er orden discreta para el Motor de Corriente Continua sin Retardo en el Actuador

Parámetros
 $d := 0.08$ $R := 1.2$ $h_a(s) := 1$ $h_{st}(s) := 1$
 $k_m := 0.6$ $L := 50 \cdot 10^{-3}$ $J_1 := 0.135$



Modelo Continuo

$$A_c := \begin{pmatrix} \frac{-R}{L} & \frac{-k_m}{L} \\ \frac{k_m}{J_1} & \frac{-d}{J_1} \end{pmatrix} \quad b_c := \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_c := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{J_1} \end{pmatrix} \quad c_c := (0 \ 1) \quad rr := \frac{60}{2 \cdot \pi}$$

Variables de Estado

$$x_1 = i_a \quad x_2 = \omega$$

Simulación Continua para 300 rpm

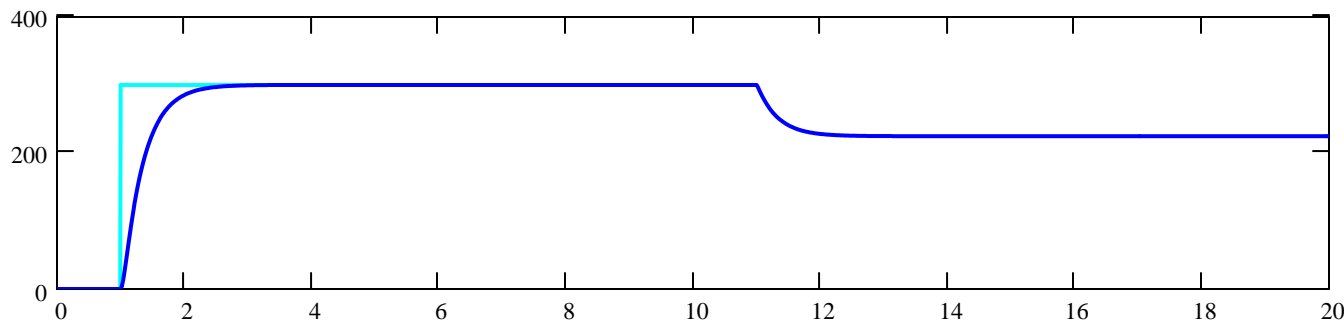
$$t_1(t) := 3 \cdot \Phi(t - 11) \quad \Omega_{ld} := 300 \quad \omega_{ld}(t) := \Omega_{ld} \cdot rr^{-1} \cdot \Phi(t - 1) \quad v_a(t) := [c_c \cdot (-A_c)^{-1} \cdot b_c]^{-1} \cdot \omega_{ld}(t) \quad t_f := 20 \quad n_f := 1000 \quad n := 0 .. n_f$$

$$D(t, x) := A_c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_c \cdot v_a(t) + e_c \cdot t_1(t) \quad CI := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z_{al} := rkfixed(CI, 0, t_f, n_f, D) \quad x_0 := CI$$

Modelo Discreto

$$\Phi_c(t) := \text{eigenvecs}(A_c) \cdot \begin{pmatrix} \exp(\text{eigenvals}(A_c)_1 \cdot t) & 0 \\ 0 & \exp(\text{eigenvals}(A_c)_2 \cdot t) \end{pmatrix} \cdot \text{eigenvecs}(A_c)^{-1} \quad T := 0.5$$

$$A_d := \Phi_c(T) \quad b_d := \begin{bmatrix} \int_0^T (\Phi_c(T - \tau) \cdot b_c)_1 \, d\tau \\ \int_0^T (\Phi_c(T - \tau) \cdot b_c)_2 \, d\tau \end{bmatrix} \quad e_d := \begin{bmatrix} \int_0^T (\Phi_c(T - \tau) \cdot e_c)_1 \, d\tau \\ \int_0^T (\Phi_c(T - \tau) \cdot e_c)_2 \, d\tau \end{bmatrix} \quad \text{eigenvals}(A_d) = \begin{pmatrix} 2.208 \times 10^{-5} \\ 0.207 \end{pmatrix} \quad c_d := c_c$$



Ubicación deseada de las raíces dominantes

$$t_s := 4 \quad \delta := 0.1 \quad SP := 0.1 \quad \xi := \frac{-\ln(SP)}{\sqrt{\ln(SP)^2 + \pi^2}} \quad \omega_n := \frac{1}{\xi \cdot t_s} \cdot \ln\left(\frac{1}{\delta \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}\right) \quad \xi = 0.591 \quad \omega_n = 1.065$$

$$z_d := \left[e^{(-\xi \cdot \omega_n + j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}) \cdot T} \quad e^{(-\xi \cdot \omega_n - j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}) \cdot T} \right] \quad z_d = (0.664 + 0.304i \quad 0.664 - 0.304i)$$

Controlador I con Retardo por Cálculo

$$A_{ck} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b_{ck} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{ck}(k_c) := k_c \cdot (1 \quad 0) \quad d_{ck} := 0 \quad h_c(z) = \frac{k_c}{z \cdot (z - 1)}$$

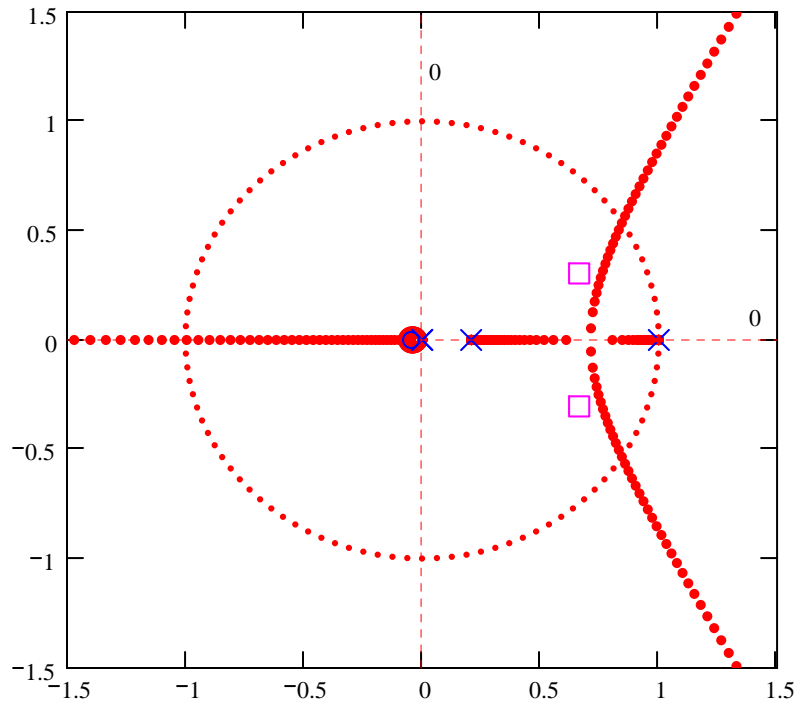
$$A_{TK}(k_c) := \text{stack}(\text{augment}(A_d, b_d \cdot c_{ck}(k_c)), \text{augment}(-b_{ck} \cdot c_d, A_{ck})) \quad \theta := 0, \frac{\pi}{50} \dots 2\pi$$

$$x(\theta) := \cos(\theta) \quad y(\theta) := \sin(\theta)$$

L.G.R.

$$mi := -6 \quad de := 0.05 \quad ma := .8$$

$$A_f(k_c) := A_{TK}(k_c) \quad m := 1 \dots 4 \quad d := mi, mi + de \dots ma \quad L_p(d) := \text{eigenvals}(A_f(10^d))$$



El L.G.R. muestra que el sistema no pasa por la ubicación deseada por lo que se agregará una red de primer orden.

Controlador I más una Red de Primer Orden

El cero del controlador T_c es escogido para cancelar el polo de la planta. el polo es ubicado para tener las raíces deseadas en el L.G.R..

$$\text{eigenvals}(A_d) = \begin{pmatrix} 2.208 \times 10^{-5} \\ 0.207 \end{pmatrix} \quad T_c := \frac{-1}{\text{eigenvals}(A_d)_2} \quad \alpha := -0.528 \quad h_c(z) = \frac{k_c \cdot \left(z + \frac{1}{T_c}\right)}{z \cdot (z - 1) \cdot \left(z + \frac{1}{\alpha \cdot T_c}\right)}$$

$$A_{ck} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\alpha \cdot T_c} & 1 - \frac{1}{\alpha \cdot T_c} \end{pmatrix} \quad b_{ck} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_{ck}(k_c) := k_c \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{T_c} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad d_{ck}(k_c) := 0 \quad \frac{1}{T_c} = -0.207 \quad \frac{1}{\alpha \cdot T_c} = 0.392$$

$$A_{Tk}(k_c) := \text{stack}(\text{augment}(A_d, b_d \cdot c_{ck}(k_c)), \text{augment}(-b_{ck} \cdot c_d, A_{ck})) \quad T_c = -4.832$$

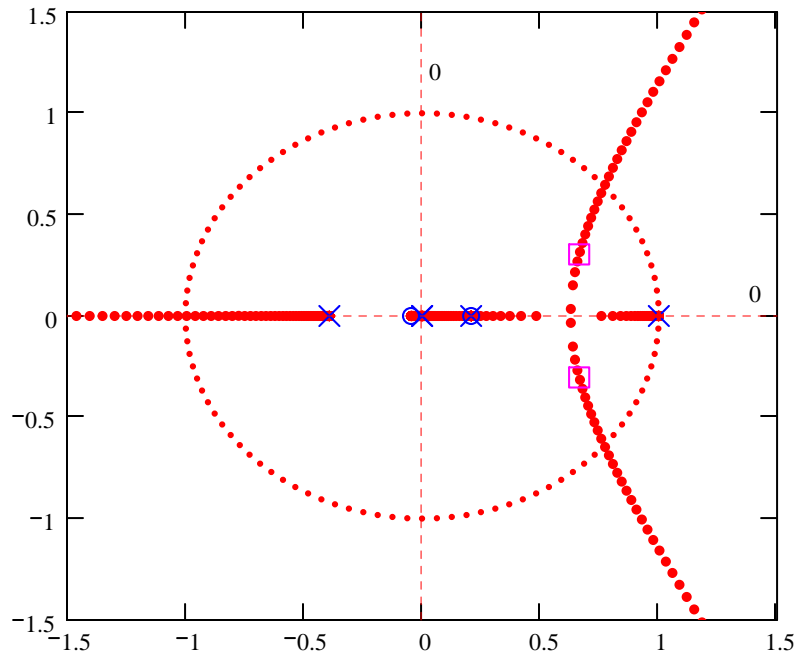
$$k_{LC} := 0.344 \quad \text{eigenvals}(A_{Tk}(k_{LC}))^T = (-0.674 \quad 0.664 + 0.303i \quad 0.664 - 0.303i \quad 0.207 \quad -0.045)$$

Con esta ganancia, un par de raíces en L.C. efectivamente están en la ubicación deseada.

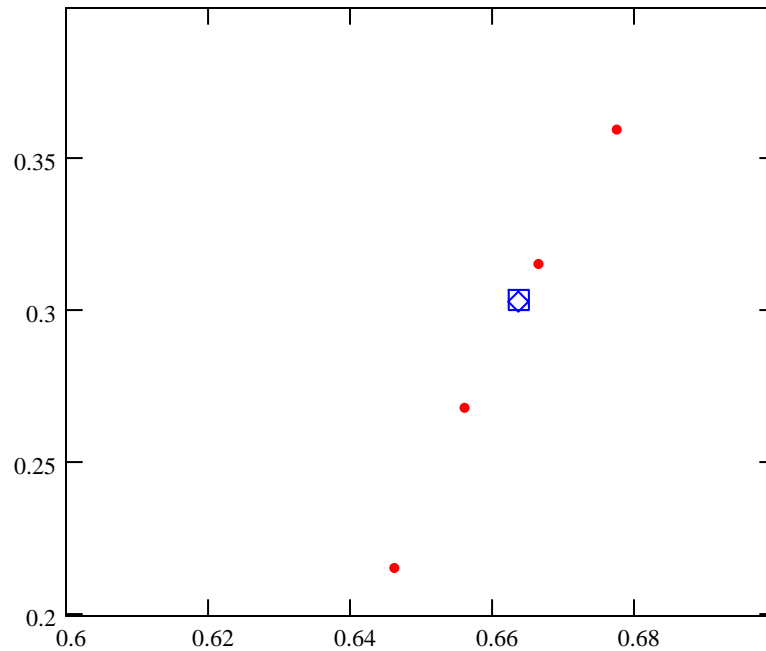
L.G.R.

$$mi := -6 \quad de := 0.05 \quad ma := .8$$

$$A_f(k_c) := A_{Tk}(k_c) \quad m := 1..5 \quad d := mi, mi + de.. ma \quad L_p(d) := \text{eigenvals}(A_f(10^d)) \quad k_{LC} := \log(k_{LC})$$



La ubicación del polo de la red α es tal que la raíz deseada queda en el L.G.R..



La ganancia es tal que un par de raíces en L.C. efectivamente están en la ubicación deseada.

Simulación en L.C. con el controlador propuesto

$$k_c := 10^{k_{LC}} \quad k_c = 0.344$$

$$A_a := \text{augment}\left(\text{augment}(A_d - b_d \cdot d_{ck}(k_c) \cdot c_d, b_d \cdot c_{ck}(k_c))^T, \text{augment}(-b_{ck} \cdot c_d, A_{ck})^T\right)^T \quad e_a := \text{augment}(e_d^T, 0 \cdot b_{ck}^T)^T$$

$$b_a := \text{augment}\left(\left(b_d \cdot d_{ck}(k_c)\right)^T, b_{ck}^T\right)^T \quad c_a := \text{augment}(c_d, 0 \cdot b_{ck}^T)$$

Entradas

$$y_d(k) := \omega_{ld}(k \cdot T)$$

$$p_d(k) := t_l(k \cdot T)$$

$$\xi_o := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Simulación Discreta

$$\xi(k) := \text{if} \left(k = 0, \xi_o, A_a^k \cdot \xi_o + \sum_{j=0}^{k-1} A_a^{k-j-1} \cdot b_a \cdot y_d(j) + \sum_{j=0}^{k-1} A_a^{k-j-1} \cdot e_a \cdot p_d(j) \right)$$

$$t_f := 20 \quad k_f := \frac{t_f}{T}$$

Entrada Continuo

$$v(k) := k_c \cdot \left(\frac{\xi(k)_3}{T_c} + \xi(k)_4 \right)$$

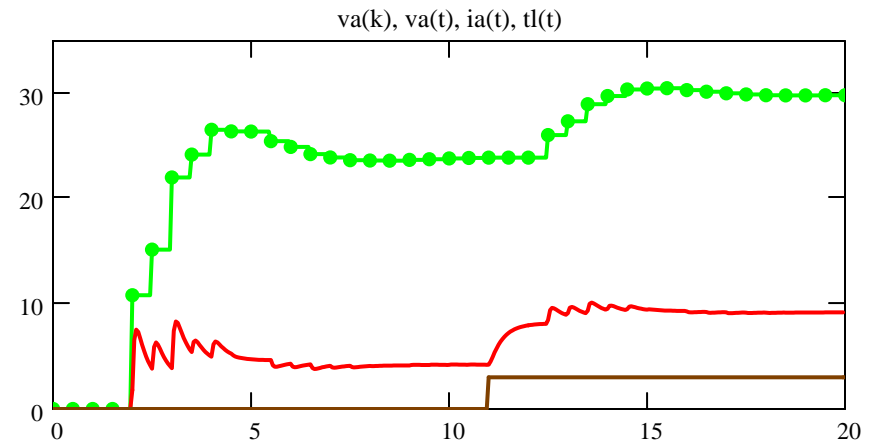
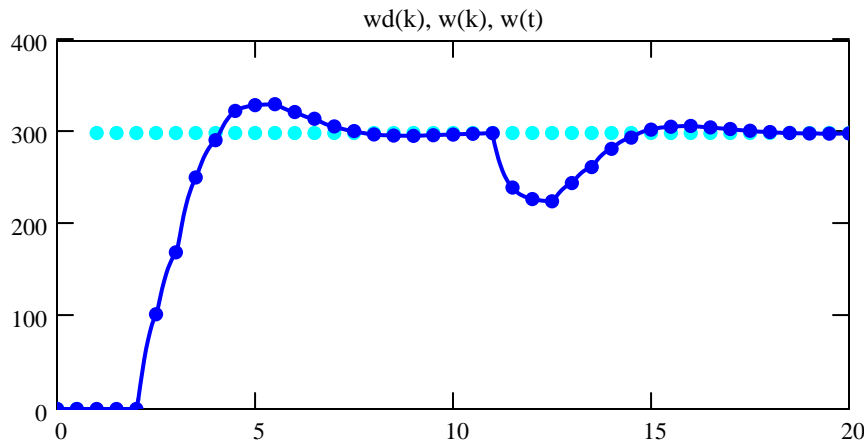
$$v_a(t) := v \left(\text{if} \left(\text{trunc} \left(\frac{t}{T} \right) < 0, 0, \text{trunc} \left(\frac{t}{T} \right) \right) \right)$$

$$k := 0 \dots k_f \quad n_f := 400$$

$$n := 0 \dots n_f \quad t := 0, \frac{t_f}{n_f} \dots t_f$$

Simulación Continua

$$D(t, x) := A_c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_c \cdot v_a(t) + e_c \cdot t_l(t) \quad CI := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z_{al} := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, n_f, D)$$



Diseño del PID usando Ziegler-Nichols (1^{er} Método)

Problema Ilustrar el uso del Segundo Método de Ziegler-Nichols.

Parámetros $n_f := 1000$ $n := 1 .. n_f$ $t_f := 4$

La función de transferencia en L.A. es: $\frac{18}{(s+1) \cdot (s+3) \cdot (s+6)} = \frac{18}{s^3 + 10s^2 + 27s + 18}$

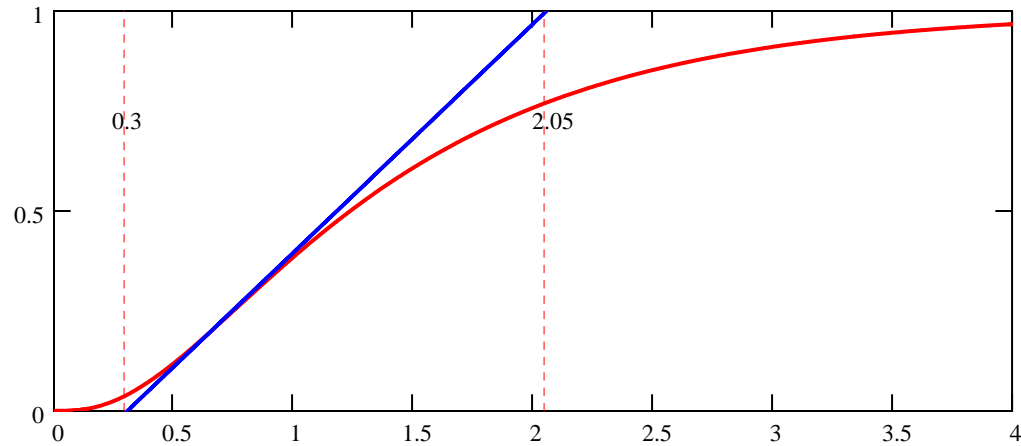
En L.A. $a_3 := 1$ $b_0 := 18$ $a_1 := 27$ $b_2 := 0$

$a_2 := 10$ $b_1 := 0$ $a_0 := 18$ $b_3 := 0$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{LA} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

$$y_n := \frac{n}{n_f} \cdot t_f \frac{1}{1.75} - 0.175$$



Del gráfico se tiene:

$$t_d := 0.3$$

$$\tau := 2.05 - 0.3$$

La función de transferencia en L.C. es:

$$18 \cdot k_p \cdot \frac{T_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{T_i}}{s^4 + 10 \cdot s^3 + (27 + 18 \cdot k_p \cdot T_d) \cdot s^2 + (18 \cdot k_p + 18) \cdot s + 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}}$$

Caso P

$$k_p := \frac{\tau}{t_d}$$

$$T_i := 10^6$$

$$a_4 := 1$$

$$b_0 := 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}$$

$$a_3 := 10$$

$$b_1 := 18 \cdot k_p$$

$$a_2 := (27 + 18 \cdot k_p \cdot T_d) \quad b_2 := 18 \cdot k_p \cdot T_d$$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$T_d := 10^{-6}$$

$$t_f := 10$$

$$a_1 := 18 \cdot k_p + 18$$

$$b_3 := 0$$

$$a_0 := 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}$$

$$b_4 := 0$$

$$Z_p := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

Caso PI

$$k_p := 0.9 \cdot \frac{\tau}{t_d}$$

$$T_i := \frac{t_d}{0.3}$$

$$a_4 := 1$$

$$b_0 := 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}$$

$$a_3 := 10$$

$$b_1 := 18 \cdot k_p$$

$$a_2 := (27 + 18 \cdot k_p \cdot T_d) \quad b_2 := 18 \cdot k_p \cdot T_d$$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$T_d := 10^{-6}$$

$$b_3 := 0$$

$$a_1 := 18 \cdot k_p + 18$$

$$a_0 := 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}$$

$$b_4 := 0$$

$$Z_{PI} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

$$k_p := 1.2 \cdot \frac{\tau}{t_d}$$

$$T_i := 2 \cdot t_d$$

$$T_d := 0.5 \cdot t_d$$

$$a_4 := 1$$

$$b_0 := 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}$$

$$a_1 := 18 \cdot k_p + 18$$

$$b_3 := 0$$

$$a_3 := 10$$

$$b_1 := 18 \cdot k_p$$

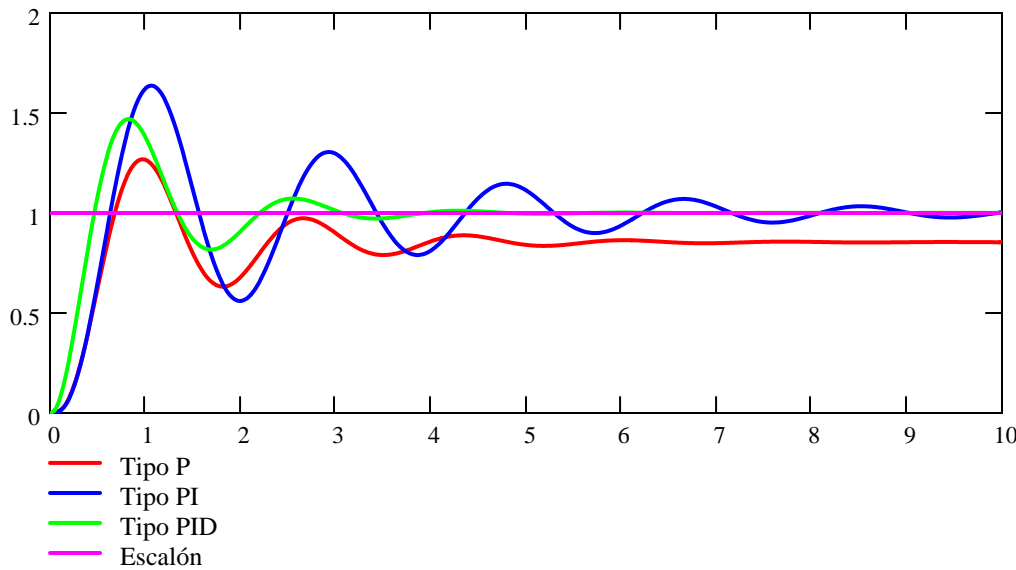
$$a_0 := 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}$$

$$b_4 := 0$$

$$a_2 := (27 + 18 \cdot k_p \cdot T_d) \quad b_2 := 18 \cdot k_p \cdot T_d$$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{PID} := \text{rkfixed} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right)$$



No todas las respuestas permiten obtener resultados satisfactorios. Todas deberán ensayarse para la apropiada selección. En este caso el PID presenta la mejor respuesta.

El 1er Método (en L.A.) de Ziegler Nichols resulta útil para sistemas sin polos en el origen, que no oscilan y tienen respuesta tipo s.

Diseño del PID usando Ziegler-Nichols (2º Método)

Problema Ilustrar el uso del Segundo Método de Ziegler-Nichols.

Párametros $k_{cr} := 30$ $P_{cr} := 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{5}}$ $n_f := 250$ $n := 1 .. n_f$ $t_f := 10$

La F. de T. en L.A. es: $\frac{1}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 5)}$

La F. de T. en L.C. es: $k_p \cdot \frac{T_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{T_i}}{s^4 + 6 \cdot s^3 + (k_p \cdot T_d + 5) \cdot s^2 + k_p \cdot s + \frac{k_p}{T_i}}$

Caso P

$k_p := 0.5 \cdot k_{cr}$ $T_i := 10^6$ $T_d := 10^{-6}$
 $a_4 := 1$ $b_4 := 0$ $a_1 := k_n$ $b_1 := k_n$
 $a_3 := 6$ $b_3 := 0$ $a_0 := \frac{k_p}{T_i}$ $b_0 := \frac{k_p}{T_i}$ $a_2 := (k_p \cdot T_d + 5)$ $b_2 := k_p \cdot T_d$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$Z_P := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

Caso PI

$k_p := 0.45 \cdot k_{cr}$ $T_i := \frac{1}{1.2} \cdot P_{cr}$ $T_d := 10^{-6}$
 $a_4 := 1$ $b_4 := 0$ $a_1 := k_n$ $b_1 := k_n$
 $a_3 := 6$ $b_3 := 0$ $a_0 := \frac{k_p}{T_i}$ $b_0 := \frac{k_p}{T_i}$ $a_2 := (k_p \cdot T_d + 5)$ $b_2 := k_p \cdot T_d$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{PI} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

Caso PD

$k_p := 0.6 \cdot k_{cr}$ $T_i := 10^6$ $T_d := 0.125 \cdot P_{cr}$
 $a_4 := 1$ $b_4 := 0$ $a_1 := k_p$ $b_1 := k_p$
 $a_3 := 6$ $b_3 := 0$ $a_0 := \frac{k_p}{T_i}$ $b_0 := \frac{k_p}{T_i}$ $a_2 := (k_p \cdot T_d + 5)$ $b_2 := k_p \cdot T_d$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{PD} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

Caso PID

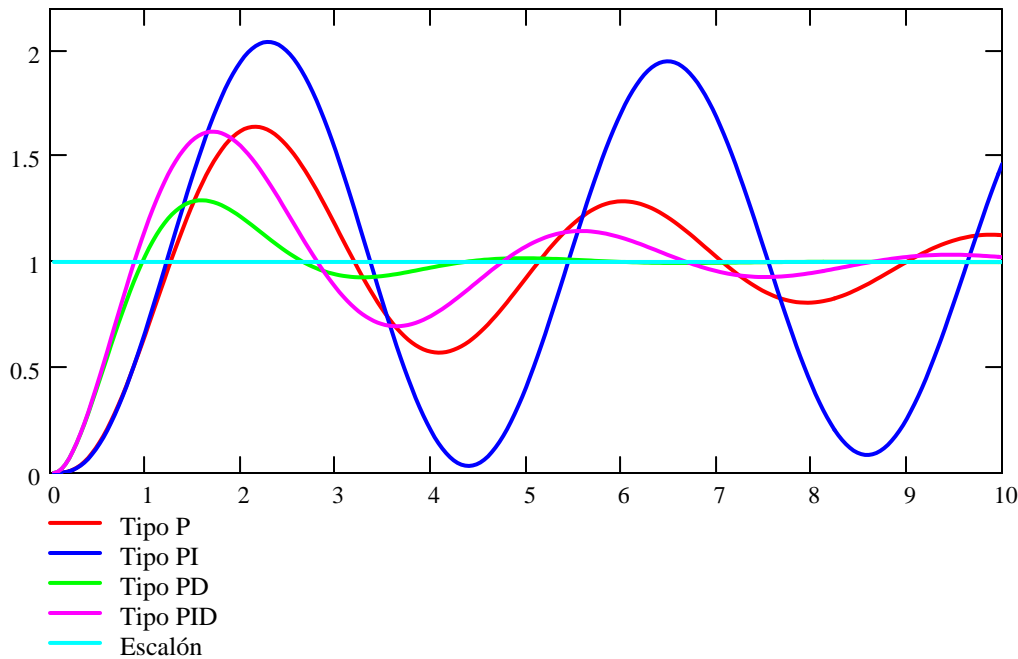
$$k_p := 0.6 \cdot k_{cr} \quad T_i := 0.5 \cdot P_{cr} \quad T_d := 0.125 \cdot P_{cr}$$

$$a_4 := 1 \quad b_4 := 0 \quad a_1 := k_p \quad b_1 := k_p$$

$$a_3 := 6 \quad b_3 := 0 \quad a_0 := \frac{k_p}{T_i} \quad b_0 := \frac{k_p}{T_i} \quad a_2 := (k_p \cdot T_d + 5) \quad b_2 := k_p \cdot T_d$$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{PID} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$



No todas las respuestas permiten obtener resultados satisfactorios. Todas deberán ensayarse para la apropiada selección. En este caso el PD presenta la mejor respuesta.

El 2^{do} Método (en L.C.) de Ziegler Nichols resulta útil para sistemas con polos en el origen y que presentan ganancia crítica.

Diseño del PID usando Harriot

Problema Ilustrar el uso del Método de Harriot.

Párametros $n_f := 1000$ $n := 0..n_f$ $t_f := 4$

La F. de T. en L.A. es:

$$\frac{2 \cdot (s + 9)}{(s + 1) \cdot (s + 3) \cdot (s + 6)} = \frac{2 \cdot (s + 9)}{s^3 + 10 \cdot s^2 + 27 \cdot s + 18}$$

La F. de T. en L.C. sólo para un k_c dado es:

$$2 \cdot k_c \cdot \frac{s + 9}{s^3 + 10 \cdot s^2 + (2 \cdot k_c + 27) \cdot s + 18 \cdot k_c + 18}$$

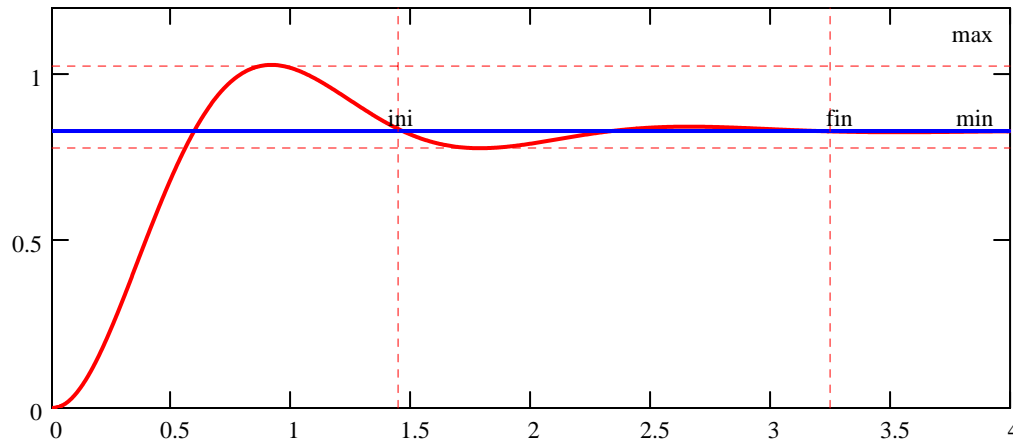
$$k_c := 4.9$$

En L.C.

$$\begin{aligned} a_3 &:= 1 & b_3 &:= 0 & a_1 &:= 2 \cdot k_c + 27 & b_1 &:= 2 \cdot k_c \\ a_2 &:= 10 & b_2 &:= 0 & a_0 &:= 18 \cdot k_c + 18 & b_0 &:= 18 \cdot k_c \end{aligned}$$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad Z_{LA} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

$$\text{max} := 1.03 \quad \text{min} := 0.78 \quad \text{ini} := 1.45 \quad \text{fin} := 3.25$$



La razón b/a es:

$$\frac{\text{max} - 18 \cdot \frac{k_c}{18 \cdot k_c + 18}}{\text{min} - 18 \cdot \frac{k_c}{18 \cdot k_c + 18}} = -3.95$$

Del gráfico se tiene:

$$P_{cr} := \text{fin} - \text{ini}$$

$$T_d \cdot s^3 + (1 + 9 \cdot T_d) \cdot s^2 + \left(9 + \frac{1}{T_i}\right) \cdot s + \frac{9}{T_i}$$

$$2 \cdot k_p \cdot \frac{\quad}{s^4 + (2 \cdot k_p \cdot T_d + 10) \cdot s^3 + (27 + 2 \cdot k_p + 18 \cdot k_p \cdot T_d) \cdot s^2 + \left(2 \cdot \frac{k_p}{T_i} + 18 + 18 \cdot k_p\right) \cdot s + 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}}$$

Caso PID

$$k_p := \frac{k_c}{12} \quad T_i := \frac{P_{cr}}{6} \quad T_d := \frac{P_{cr}}{1.5} \quad t_f := 15$$

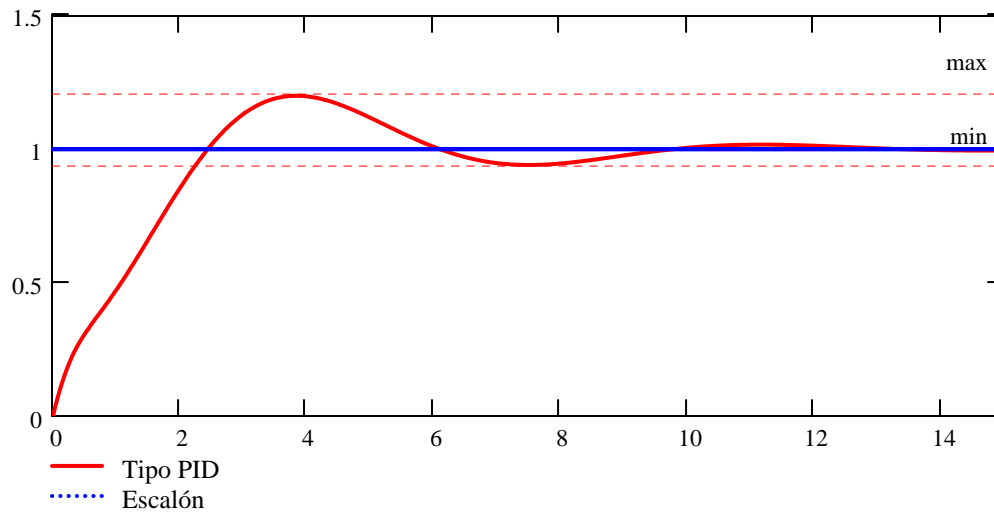
$$a_4 := 1 \quad b_4 := 0 \quad a_2 := 27 + 2 \cdot k_p + 18 \cdot k_p \cdot T_d \quad b_2 := 2 \cdot k_p \cdot (1 + 9 \cdot T_d) \quad b_0 := 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}$$

$$a_3 := 2 \cdot k_p \cdot T_d + 10 \quad b_3 := 2 \cdot k_p \cdot T_d \quad a_1 := 2 \cdot \frac{k_p}{T_i} + 18 + 18 \cdot k_p \quad b_1 := 2 \cdot k_p \cdot \left(9 + \frac{1}{T_i}\right) \quad a_0 := 18 \cdot \frac{k_p}{T_i}$$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$Z_{PID} := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, t_f, n_f, D \right]$$

$$\max := 1.21 \quad \min := 0.94 \quad \frac{1 - \max}{1 - \min} = -3.5$$



La respuesta es satisfactoria; sin embargo la determinación del período no es una tarea inmediata a excepción de tener la planta.

El Método de Harriot es una alternativa para sistemas que deben operar en lazo cerrado pero que no presentan una oscilación estable.

Control PID del Levitador Magnético

Problema Ubicación de las raíces del sistema de levitación magnética.

Parámetros

$$R := 1 \quad L := 50 \cdot 10^{-3} \quad g := 9.8 \quad K := 24.5 \quad l_1 := 0.5 \quad \Delta x_0 := 5 \cdot 10^{-2}$$

$$m := 0.250 \quad k_i := 3 \cdot 10^{-3} \quad a := 0.02 \quad d := 1.5 \quad l_0 := 0.3$$

Modelo.

$$\frac{d}{dt} i = \frac{e}{L} - \frac{R}{L} \cdot i \quad \frac{d}{dt} x = v \quad \frac{d}{dt} v = -g + \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i^2}{l_1 - x + a} + \frac{K}{m} \cdot (l_0 - x) - \frac{d}{m} \cdot v$$

Condiciones Iniciales y Entradas.

la corriente i_{f1} para tener la bola a 30 cm desde el piso en $t = 0$ es,

$$x_f := \frac{30}{100} \quad i_{f1} := \frac{1}{k_i} \cdot \sqrt{\left[k_i \cdot (g \cdot m \cdot l_1 - g \cdot m \cdot x_f + g \cdot m \cdot a + K \cdot x_f \cdot l_1 - K \cdot l_0 \cdot l_1 + K \cdot l_0 \cdot x_f - K \cdot l_0 \cdot a - K \cdot x_f^2 + K \cdot x_f \cdot a) \right]}$$

por lo que la tensión e_{f1} a aplicar es, las c.i. son entonces, $i_0 := i_{f1} \quad x_0 := x_f \quad v_0 := 0$

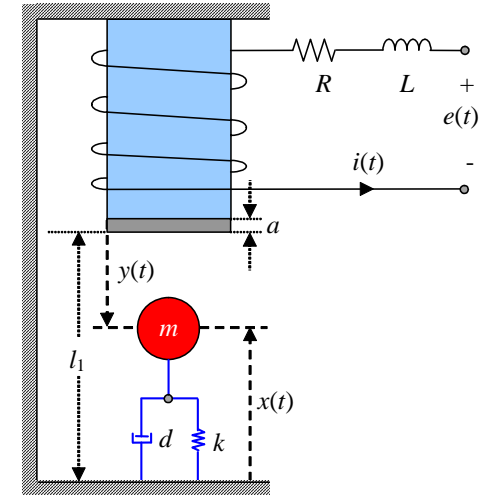
$$e_{f1} := i_{f1} \cdot R \quad e_{f1} = 13.404 \quad i_0 := i_0 \quad x_0 := x_0 \quad v_0 := v_0$$

Modelo Lineal

$$A := \begin{bmatrix} \frac{-R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 \cdot \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0}{l_1 - x_0 + a} + \frac{k_i}{m} \cdot \frac{i_0^2}{(l_1 - x_0 + a)^2} - \frac{K}{m} & \frac{-d}{m} & \frac{-d}{m} \end{bmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c := (0 \ 1 \ 0) \quad e_o := e_{f1}$$

Controlador Continuo.

$$h_c(s) := k_c \cdot \frac{s^2 + \frac{d}{m} \cdot s + \frac{K \cdot (l_1 - x_0 + a)^2 - k_i \cdot i_0^2}{m \cdot (l_1 - x_0 + a)^2}}{s \cdot (s + p_1)}$$



Variables de Estado

$$x_1 = i_a \quad x_2 = x \quad x_3 = \frac{d}{dt} x = v$$

Se desea un SP de 10% y un tiempo de asentamiento de 1.5 s,

$$t_s := 1.5 \quad SP := 0.10 \quad \xi := \frac{-\ln(SP)}{\sqrt{\ln(SP)^2 + \pi^2}} \quad \xi = 0.591$$

$$r := \begin{pmatrix} -\xi \cdot \omega_n + i \cdot \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \\ -\xi \cdot \omega_n - i \cdot \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} -2.14 + 2.92i \\ -2.14 - 2.92i \end{pmatrix}$$

$$\delta := 0.05$$

$$\omega_n := \ln\left(\frac{1}{\delta \sqrt{1 - \xi^2}}\right) \cdot \frac{1}{\xi \cdot t_s} \quad \omega_n = 3.621$$

$$k_{cto} := \frac{2 \cdot k_i \cdot i_0}{(1_1 - 1 \cdot x_0 + a) \cdot m \cdot L}$$

Se define para simplicidad algebraica.

$$p_1 := \frac{-R \cdot r_1 - R \cdot r_2 - r_2 \cdot L \cdot r_1 - L \cdot (r_1)^2 - (r_2)^2 \cdot L}{R + L \cdot r_1 + r_2 \cdot L} \quad p_1 = 5.115$$

Estas soluciones se obtienen simbólicamente.

$$p_2 := \frac{R^2 + R \cdot r_1 \cdot L + R \cdot r_2 \cdot L + r_2 \cdot L^2 \cdot r_1}{L \cdot (R + L \cdot r_1 + r_2 \cdot L)} \quad p_2 = 20.834$$

$$k_c := \frac{R^2 + R \cdot r_1 \cdot L + R \cdot r_2 \cdot L + r_2 \cdot L^2 \cdot r_1}{L \cdot (R + L \cdot r_1 + r_2 \cdot L)} \cdot r_1 \cdot \frac{r_2}{k_{cto}} \quad k_c = 9.34$$

El controlador $h_c(s)$ tiene dos polos y dos ceros. Su representación en variables de estado es,

$$b_0 := \frac{K \cdot (1_1 - x_0 + a)^2 - k_i \cdot i_0^2}{m \cdot (1_1 - x_0 + a)^2} \quad b_1 := \frac{d}{m} \quad b_2 := 1 \quad a_0 := 0 \quad a_1 := p_1$$

$$A_c := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \quad b_c := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_c := (b_0 - a_0 \cdot b_2 \quad b_1 - a_1 \cdot b_2) \quad d_c := b_2$$

Funciones de Transferencia en L.C.

$$A_r(k) := \text{stack}(\text{augment}(A - b \cdot d_c \cdot c \cdot k, b \cdot k \cdot c_c), \text{augment}(-b_c \cdot c, A_c)) \quad b_r(k) := \text{stack}(b \cdot d_c \cdot k, b_c)$$

$$c_r := \text{augment}(c, 0 \cdot c_c) \quad d_r := 0$$

Polos en L.C. para k_c calculado.

$$\text{polos : } \text{pol} := \text{eigenvals}(A_1(k_c)) \quad \text{pol} = \begin{pmatrix} -20.834 \\ -3 - 6.667i \\ -3 + 6.667i \\ -2.14 - 2.92i \\ -2.14 + 2.92i \end{pmatrix}$$

El sistema tiene los polos deseados,

$$r_1 = -2.14 + 2.92i$$

$$r_2 = -2.14 - 2.92i$$

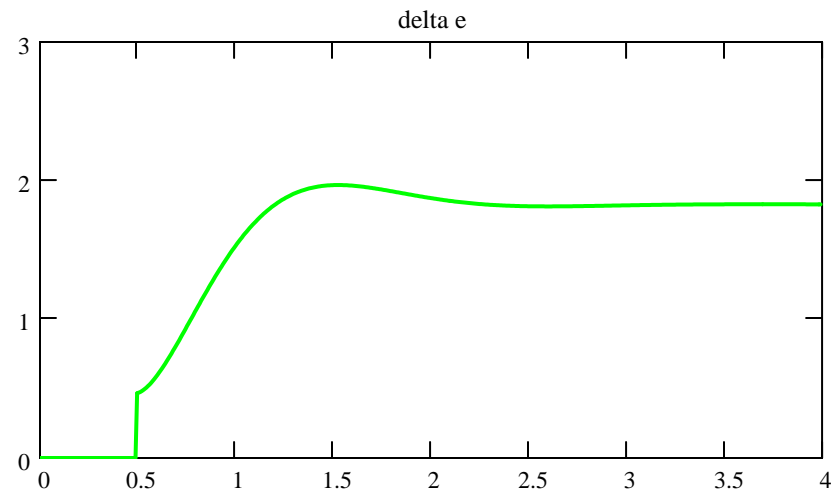
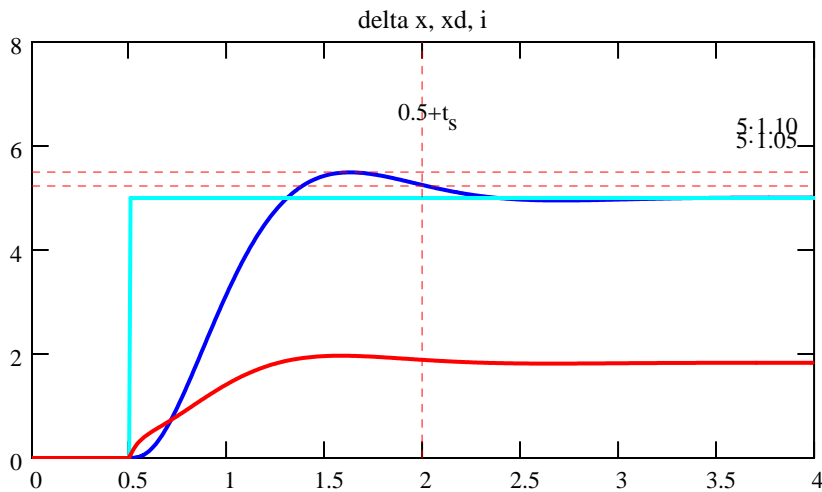
el polo real está muy alejado y los otros polos son cancelados con los ceros del controlador.

Simulación Sistema en L.C. de Posición.

$$t_f := 4 \quad l_f := 500 \quad ll := 0 .. l_f \quad t := 0, \frac{t_f}{l_f} .. t_f \quad \Delta x_d(t) := \Delta x_o \cdot \Phi(t - 0.5)$$

$$D(t, x) := \text{Re}(A_1(k_c)) \cdot (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T + \text{Re}(b_1(k_c)) \cdot \Delta x_d(t) \quad CI := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad Z_c := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, l_f, D)$$

$$v(ll) := k_c \cdot \left[\begin{array}{l} \text{augment}(c \cdot 0, c_c) \cdot \left((Z_{c_{ll,2}} \ Z_{c_{ll,3}} \ Z_{c_{ll,4}} \ Z_{c_{ll,5}} \ Z_{c_{ll,6}}) \right)^T \dots \\ + d_c \cdot \left(\Delta x_d \left(ll \cdot \frac{t_f}{l_f} \right) - c_r \cdot \left((Z_{c_{ll,2}} \ Z_{c_{ll,3}} \ Z_{c_{ll,4}} \ Z_{c_{ll,5}} \ Z_{c_{ll,6}}) \right)^T \right) \end{array} \right]$$



$$\Phi_{c11}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{1,1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow \exp(-20 \cdot t)$$

$$\Phi_{c12}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{1,2} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow 0$$

$$\Phi_{c13}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{1,3} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow 0$$

$$\Phi_{c21}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{2,1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow 4.3852 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-20 \cdot t) - 4.3852 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \cos(6.6674 \cdot t) + 1.1181 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \sin(6.6674 \cdot t)$$

$$\Phi_{c22}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{2,2} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow \exp(-3 \cdot t) \cdot \cos(6.6674 \cdot t) + .44995 \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \sin(6.6674 \cdot t)$$

$$\Phi_{c23}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{2,3} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow .14998 \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \sin(6.6674 \cdot t)$$

$$\Phi_{c31}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{3,1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow -8.7703 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-20 \cdot t) + 8.7703 \cdot 10^{-2} \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \cos(6.6674 \cdot t) - 4.3049 \cdot 10^{-3} \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \sin(6.6674 \cdot t)$$

$$\Phi_{c32}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{3,2} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow 1.1996 \cdot 10^{-19} \cdot \exp(-20 \cdot t) - 1.1996 \cdot 10^{-19} \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \cos(6.6674 \cdot t) - 8.0173 \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \sin(6.6674 \cdot t)$$

$$\Phi_{c33}(t) := \left[(ss \cdot \text{identity}(3) - A)^{-1} \right]_{3,3} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, ss} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow -.44995 \cdot \exp(-3 \cdot t) \cdot \sin(6.6674 \cdot t) + \exp(-3 \cdot t) \cdot \cos(6.6674 \cdot t)$$

$$\Phi_c(t) := \begin{pmatrix} \Phi_{c11}(t) & \Phi_{c12}(t) & \Phi_{c13}(t) \\ \Phi_{c21}(t) & \Phi_{c22}(t) & \Phi_{c23}(t) \\ \Phi_{c31}(t) & \Phi_{c32}(t) & \Phi_{c33}(t) \end{pmatrix} \quad T := 0.1$$

$$A_d := \Phi_c(T) \quad b_d := \left[\int_0^T (\Phi_c(T - \tau) \cdot b)_1 d\tau \quad \int_0^T (\Phi_c(T - \tau) \cdot b)_2 d\tau \quad \int_0^T (\Phi_c(T - \tau) \cdot b)_3 d\tau \right]^T \quad c_d := c \quad d_d := 0$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 0.135 & 0 & 0 \\ 3.163 \times 10^{-3} & 0.788 & 0.069 \\ 0.037 & -3.673 & 0.376 \end{pmatrix} \quad b_d = \begin{pmatrix} 0.865 \\ 2.628 \times 10^{-3} \\ 0.063 \end{pmatrix} \quad c_d = (0 \ 1 \ 0) \quad d_d = 0$$

Se busca el modelo discreto del Controlador con ganancia incluida.

$$\Phi_{c11}(t) := \left[\left(\text{ss}\cdot\text{identity}(2) - A_c \right)^{-1} \right]_{1,1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace,ss} \\ \text{float,5} \end{array} \right. \rightarrow 1.$$

$$\Phi_{c12}(t) := \left[\left(\text{ss}\cdot\text{identity}(2) - A_c \right)^{-1} \right]_{1,2} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace,ss} \\ \text{float,5} \end{array} \right. \rightarrow -.19550 \cdot \exp(-5.1150 \cdot t) + .19550$$

$$\Phi_{c21}(t) := \left[\left(\text{ss}\cdot\text{identity}(2) - A_c \right)^{-1} \right]_{2,1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace,ss} \\ \text{float,5} \end{array} \right. \rightarrow 0$$

$$\Phi_{c22}(t) := \left[\left(\text{ss}\cdot\text{identity}(2) - A_c \right)^{-1} \right]_{2,2} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace,ss} \\ \text{float,5} \end{array} \right. \rightarrow 1.0000 \cdot \exp(-5.1150 \cdot t)$$

$$\Phi_c(t) := \begin{pmatrix} \Phi_{c11}(t) & \Phi_{c12}(t) \\ \Phi_{c21}(t) & \Phi_{c22}(t) \end{pmatrix}$$

$$A_{cd} := \Phi_c(T) \quad b_{cd} := \left[\int_0^T (\Phi_c(T-\tau) \cdot b_c)_1 d\tau \quad \int_0^T (\Phi_c(T-\tau) \cdot b_c)_2 d\tau \right]^T \quad c_{cd} := c_c \cdot k_c \quad d_{cd} := d_c \cdot k_c$$

$$A_{cd} \cdot 1000 = \begin{pmatrix} 1 \times 10^3 & 78.279 \\ 0 & 599.596 \end{pmatrix} \quad b_{cd} \cdot 1000 = \begin{pmatrix} 4.246 \\ 78.28 \end{pmatrix} \quad c_{cd} = (499.256 \quad 8.266) \quad d_{cd} = 9.34$$

Se determina por simplicidad el modelo del retardo en conjunto con el del controlador.

$$A_{rd} := 0 \quad b_{rd} := 1 \quad c_{rd} := 1 \quad d_{rd} := 0 \quad \text{retardo unitario}$$

$$b_k := \text{stack}(\text{augment}(A_{cd}, b_{cd} \cdot c_{rd}), \text{augment}(0 \cdot c_{cd}, A_{rd})) \quad c_k := \text{augment}(c_{cd}, d_{cd} \cdot c_{rd})$$

$$d_k := \text{stack}(b_{cd} \cdot d_{rd}, b_{rd}) \quad d_k := d_{cd} \cdot d_{rd}$$

combinación
retardo -
controlador

Se determina el modelo de todo el sistema en L.C..

$$A_a := \text{stack}(\text{augment}(A_d - b_d \cdot d_k \cdot c_d, b_d \cdot c_k), \text{augment}(-b_k \cdot c_d, A_k)) \quad b_a := \text{stack}(b_d \cdot d_k, b_k) \quad c_a := \text{augment}(c_d, c_k \cdot 0)$$

Simulación.

Entradas

$$y_d(k) := \Delta x_0 \cdot \Phi(k \cdot T - 0.5)$$

$$\xi_0 := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Simulación
Discreta

$$\xi(k) := \text{if} \left(k = 0, \xi_0, A_a^k \cdot \xi_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A_a^{k-j-1} \cdot b_a \cdot y_d(j) \right)$$

$$t_f := 4 \quad k_f := \frac{t_f}{T}$$

Entrada
Continuo

$$v(k) := \text{augment}(c_d \cdot 0, c_k) \cdot \xi(k) + d_k \cdot (y_d(k) - c_a \cdot \xi(k))$$

$$k := 0 .. k_f \quad n_f := 400$$

$$v_a(t) := \text{Re} \left(v \left(\text{if} \left(\text{trunc} \left(\frac{t}{T} \right) < 0, 0, \text{trunc} \left(\frac{t}{T} \right) \right) \right) \right)$$

$$n := 0 .. n_f \quad t := 0, \frac{t_f}{n_f} .. t_f$$

Simulación
Continua

$$D(t, x) := A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + b \cdot v_a(t) \quad CI := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Z_{al} := \text{rkfixed}(CI, 0, t_f, n_f, D)$$

T = 0.1