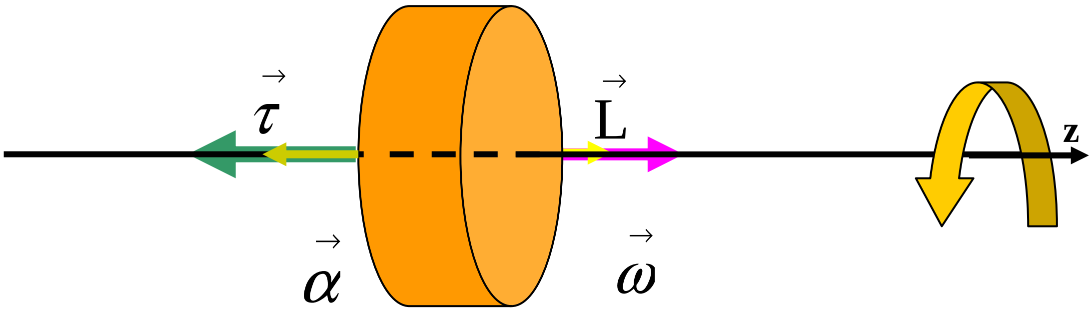
1.- Un cilindro esmeril eléctrico de masa 8 kg, radio externo 15 cm y ancho 5 cm gira con frecuencia 1000 rpm. Al apagar el motor el cilindro se detiene producto de una aceleración de 4 rad/s^2.
a.- Calcule y dibuje los vectores velocidad angular, aceleración angular, torque y momento angular asociados a este cuerpo.
b.- ¿Cómo se modifica lo calculado en "a" si el eje del cilindro es una barra de acero de diámetro 6 cm, largo 20 cm y masa 4 kg.

Solución.
a.- La figura muestra la situación



la aceleración apunta en sentido opuesto a la velocidad angular porque el cambio de velocidad angular apunta en la dirección z negativa, $\omega_2 - \omega_1$ es negativa pues la velocidad 2 es menor que la uno. El momento angular es paralelo a la velocidad angular (L = Iω) y el torque es paralelo a la aceleración angular. El torque y aceleración angular, además, son constantes.
Cálculos.

Aceleración angular $\vec{\alpha} = -4\,\hat{k}\ \text{rad/s}^2$

Torque
$$\vec{\tau} = \text{I}\,\vec{\alpha}$$
$$\vec{\tau} = -0.36\,\hat{k}\ \text{Nm}$$

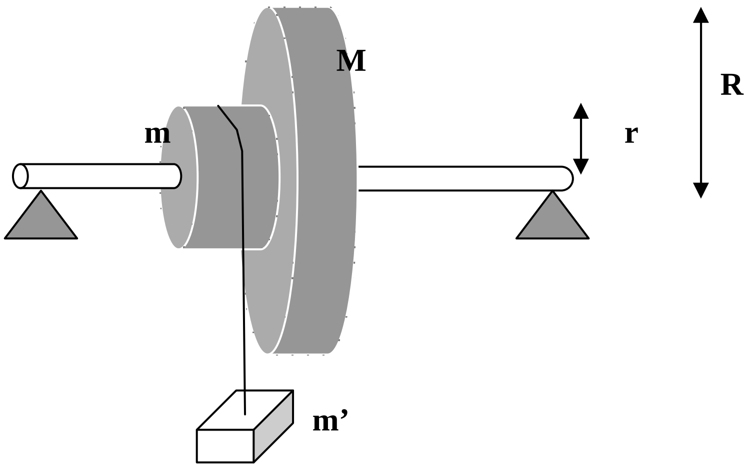
Velocidad angular $\omega = 2 \times \pi \times 1000 / 60$ rad/s
$= 104.7$ rad/s
$$\vec{\omega} = (104.7 - 4t)\,\hat{k}\ \text{rad/s}$$

Momento angular
$$\vec{L} = \text{I}\,\vec{\omega}$$
$$\vec{L} = 0.09\text{x}(104.7 - 4t)\,\hat{k}\ \text{kgm}^2/\text{s}$$

b.- Los vectores alfa y omega no se modifican. Los vectores torque y momento angular modifican solo sus módulos pues ahora el momento de inercia ha cambiado,
$$\text{I} = (mr^2)/2 + [M\,(R_{int} + R_{ext})^2]/2$$
con m = 4 kg, r = 0.03 m, M= 8 kg, R_{int} = 0.03 m y R_{ext}= 0.15 m

2.- La figura muestra un cilindro de masa m y radio r soldado a otro de masa M y radio R. El sistema puede gira en torno al eje de simetría, sin roce. Colgado a este sistema, mediante una cuerda sin masa e inextensible, se encuentra un cuerpo de masa m'. Inicialmente el cuerpo colgante se encuentra a h metros del piso y en reposo.

a.- Usando conceptos de energía encuentre la velocidad de m' al cabo de recorrer los h metros.
b.- Encuentre una expresión para el torque y momento angular del sistema que rota en el instante de partida, para cuando m está por tocar el piso y para cuando m' ya ha llegado y está sin movimiento. Suponga que el choque de m' con el piso es completamente inelástico.
c. - Suponga que existe roce entre el eje de rotación y los soportes del eje. Este roce ejerce un torque de resistencia τ. Usando los conceptos de fuerza y torque, determine el valor mínimo de ese torque resistivo para mantener al sistema en reposo.



Solución.

a.- en todo momento debemos considerar la posibilidad de que exista energía mecánica de todo tipo: de traslación, de rotación, elástica, gravitatoria y/o pérdidas. En este caso la situación es simple:

$$(m'gy + m'v^2/_2 + I\omega^2/_2\ )_1 = (\ m'gy + m'v^2/_2 + I\omega^2/_2\ )_2$$

en donde los y dependen del sistema de referencia elegido e I es el momento de inercia del conjunto de cilindros; los sub índices 1 y 2 se refieren a los instantes diferentes en que se evalúa el sistema. Si se coloca el punto (1) cuando y = h y el punto (2) cuando y =0, se tiene

$$m'gh + 0 + 0 = 0 + m'v^2/_2 + I\omega^2/_2$$

como v = r ω (v está relacionada con ω a través del cilindro pequeño) implica

$$m'gh = m'v^2/_2 + I(v/r)^2/_2$$

de donde se despeja la velocidad v:

$$v = \sqrt{\frac{2m'gh}{m'+I/r^2}}$$

El momento de inercia , en este caso, es $I = (mr^2)/2 + (MR^2)/2$ pues el cilindro pequeño se dice pegado al mayor.

La velocidad también se puede obtener aplicando las condiciones dinámicas:
Segundsa ley de Newton aplicada a m’,

$m'g - T = m'a$, siendo T la tensión que la cuerda aplica a m’.
Rotación para el cilindro,

$T\,r = I\,\alpha$
A las dos ecuaciones anteriores se le agrega la relación entre aceleración angular y tangencial en el cilindro pequeño,

$a = r\,\alpha$.

Resolviendo el sistema de 3 ecuaciones se encuentra la aceleración de m’. Una vez determinada la aceleración se aplica la cinemática ($v^2 = 2a\Delta y$) para calcular v; debe llegar al mismo resultado anteriormente obtenido usando conservación de la energía.

b.- Como $\tau = I\,\alpha$ y la aceleración angular es única, se tiene que el torque es el mismo para todo momento, excepto para cuando ya m’ ya ha chocado con el piso. En este último caso el torque sobre el cilindro es cero pues ya no existe la fuerza que la cuerda ejerce sobre él.
El valor se obtiene de una de dos maneras: calculando T del sistema anterior y usar rT, o bien usar Iα calculando la aceleración angular del mismo sistema. En ambos casos debe dar como resultado,

$$\alpha = \frac{m'gr}{m'r^2 + I}$$

por tanto el torque es

$$\tau = \frac{I\,m'gr}{m'r^2 + I}$$

con I = = $(mr^2)/2 + (MR^2)/2$.

c.- para que el sistema quede en reposo se debe tener que la suma de los torques sea nula

$\tau_{1z} + \tau_{2z} = 0$

por tanto el torque que debe aplicarse en el eje es

$\tau_{2z} = -\tau_{1z}$

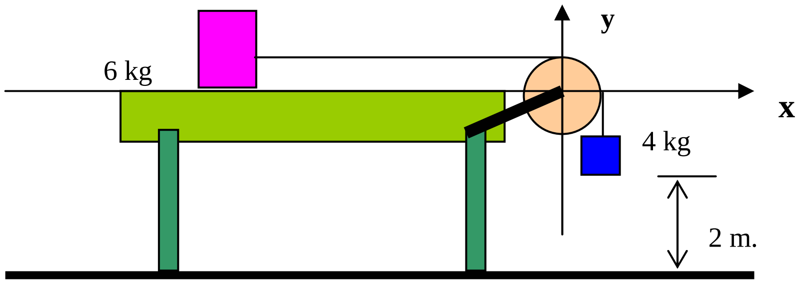
y como τ_{1z} ya se calculó en la parte b del problema es cosa de reemplazar y listo.

3.- La figura muestra un bloque de masa 6 kg que está unido a otro de masa 4 kg por medio de una cuerda inextensible y sin masa. Ambos se conectan entre sí por medio de una polea, polea que es un disco cilíndrico de masa 12 kg y radio 0.5 m. Considere que no hay roce en el eje de giro de la polea y que el sistema cuerda-polea no desliza. No hay roce entre el bloque de 6 kg y la mesa. El sistema inicialmente estaba en reposo.

a.- Usando el sistema de referencia indicado escriba el conjunto de ecuaciones que gobiernan el sistema, es decir el conjunto de ecuaciones asociadas a fuerza y torque existentes.

b.- Determine la velocidad de cada uno de los bloques cuando el cuerpo que está colgando llega justo al piso.

c.- Respecto de un observador ubicado en el eje de giro de la polea determine el torque y momento angular de la polea y del bloque de 4 kg para cualquier instante.



Solución.-

a.- aplicando la segunda ley de Newton para ambas masas, torque para la polea y la relación entre aceleraciones se tiene:

para M = 6 kg	$T = Ma$
para m = 4 kg	$mg - T' = ma$
para la polea	$T'R - TR = I\alpha$
aceleraciones	$a = R\alpha$

sistema que se puede resolver ya que son 4 ecuaciones con 4 incógnitas: a, T, T' y α.

Si se desea expresar usando los valores numéricos:

para M = 6 kg	$T = 6a$
para m = 4 kg	$4g - T' = 4a$
para la polea	$T' - T = 3\alpha$
aceleraciones	$a = 0.5\alpha$

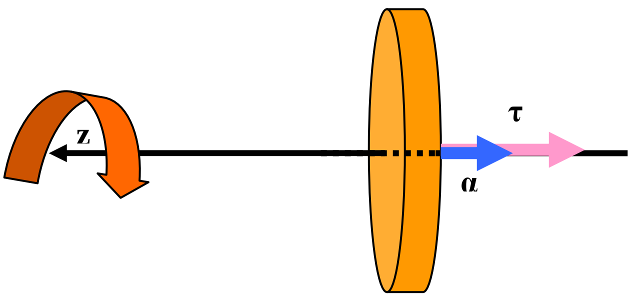
b.- Resolviendo el sistema de ecuaciones para la aceleración lineal;

$$a = g / 4$$

con lo cual se obtiene la velocidad tanto de m como de M para cuando m ha recorrido los 2 m que lo separan del piso,

$$v = 3.13 \text{ m/s.}$$

puede comprobar aplicando conservación de la energía mecánica. Para después que m ha chocado con el piso el cuerpo que está sobre la mesa continúa moviéndose pero ya lo hace con velocidad constante de 3.13 m/s y la polea continuará girando con una velocidad angular de 6.26 rad/s.
Ahora si se desea detener la polea después que m ha chocado con el piso entonces si debe aplicar un torque sobre ella. El torque necesario va a depender de la fuerza extra que aplique y el sentido de esa fuerza; por ejemplo si la fuerza aplicada es de 9 N y aplicada en el borde de la polea de tal manera que el torque sea positivo, entonces el disco se detiene y los hará en 2.1 s aproximadamente. Para llegar al 2.1 s use $\tau = I\,\alpha$ siendo $\tau = RF$, $I = MR^2/ 2$ y resulta $\alpha = 3$ rad/s^2; enseguida use $\omega = \omega_o + \alpha\,\Delta t$ para obtener el 2.1 s.
Como ilustración final de esta parte se dibuja los vectores torque y aceleración angular para antes de chocar con el piso:



c.-

Torques.
Para la polea. Es constante pues el momento de inercia y su aceleración angular lo son, como se vio en la parte anterior.

$$\vec{\tau} = -3.44\,\hat{k}\ \text{Nm} \ ,$$

el vector es el dibujado previamente.
Para el cuerpo de 6 kg. La fuerza aplicada es T y el brazo correspondiente es el radio de la polea pero se supone que la tensión se aplica de tal manera que la cuerda permanece horizontal y afecta al cuerpo solo en su movimiento de traslación, por tanto se aplica en el CM y no ejerce rotación. Si se aplicara en un punto diferente que no pase por el CM, entonces el cuerpo podría llegar a rotar en algún moment, especialmente si se le agrega roce.
Para m = 4 kg. También aquí se supone la tensión T’ aplicada en el cuerpo de tal manera que solo afecta a la traslación del cuerpo.

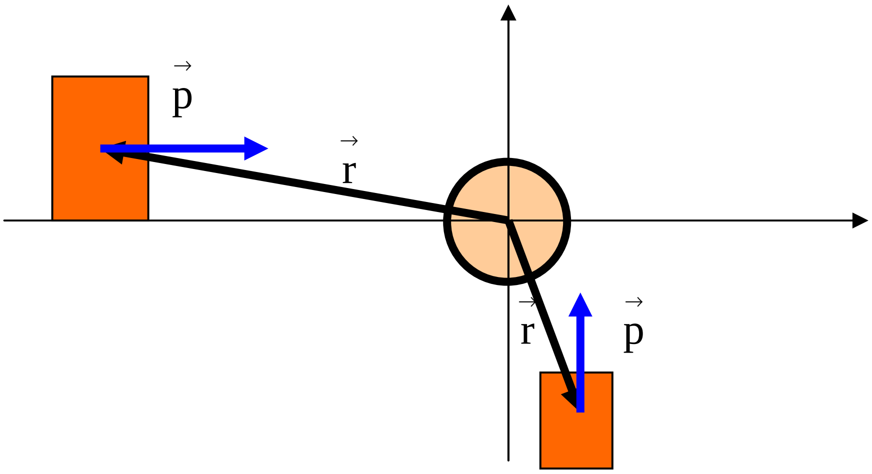
Momentos angulares.

Para la polea: Se usa L = I ω, y en forma vectorial,

$$\vec{L} = -7.35t\,\hat{k}\,kgm^2/s$$

con $0 \leq t \leq 1.28$ s. En donde 1.28 s es el tiempo que demoran los 4 kg en llegar al piso.

Para la masa de 6 kg. La figura muestra los vectores involucrados tanto para M como para m.



las posiciones y momentos lineales son diferentes para cada masa. Haciendo el producto cruz entre los vectores resulta el momento angular: L = r m v cosφ, en donde r cos φ es igual al radio R de la polea y. por tanto

$$\begin{aligned} L &= m R v \\ &= m R a t \\ &= m R (g / 4) t \\ &= 4.9\ t\ kgm^2/s \text{ para } m = 4 \text{ kg y} \\ &= 7.35\ t\ kg\ m^2/s \text{ para } M = 6 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Vectorialmente:

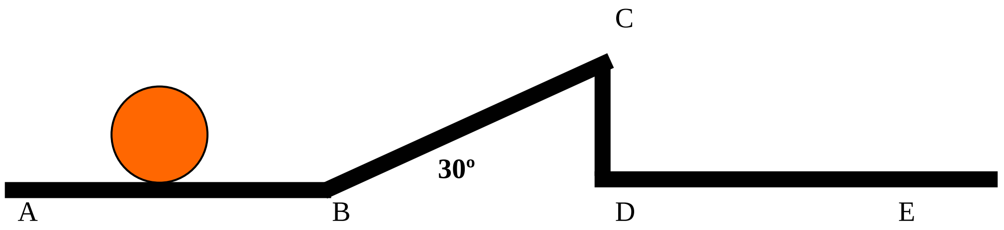
para M $$\vec{L} = -7.35t\,\hat{k}\,kgm^2/s$$

para m $$\vec{L} = -4.9t\,\hat{k}\,kgm^2/s$$

4.- La figura muestra un cilindro macizo de radio 10 cm y masa 12 kg que rueda y avanza sin deslizar por el plano horizontal a una velocidad de 8 m/s. Después de recorrer la distancia AB (=6m) sube por un plano inclinado en 30°; en ese plano avanza y rota sin deslizar. El plano inclinado (AC) posee una longitud de 4 m.

a.- El cilindro ¿chocará en algún punto del tramo DE? Haga algún cálculo que le permita justificar su respuesta. Si usted decide que el bloque llegará al tramo DE, encuentre la energía de rotación y de traslación que posee el cilindro cuando choca con el piso.

b.- Indique qué magnitudes físicas se conservan en cada uno de los tramos que recorre el cuerpo, justifique.



Solución.

a.- Si el cilindro llega al punto C con alguna velocidad, entonces aterrizará en algún punto de DE.

Por conservación de energía mecánica el cilindro llega al punto C con velocidad lineal

$$V \approx 6.15 \text{ m/s},$$

luego va a pasar mas allá de C.

En todo el espacio sobre el tramo DE el cuerpo posee velocidad angular constante (porque la única fuerza que actúa es el peso y ella pasa por el eje de giro) e igual a la última que tuvo antes de abandonar el plano inclinado:

$$K = (I\omega^2) / 2$$

con

$$\omega = 6.15 / 0.1 \text{ rad / s}$$
$$= 61.5 \text{ rad / s.}$$

Por tanto la energía cinética de rotación es

$$K = 0.06 \times (61.5)^2 / 2 \text{ J.}$$
$$= 113.6 \text{ J.}$$

Para obtener la energía de traslación se usa $K = (mv^2) / 2$ siendo v la velocidad del CM. Dicha velocidad (módulo) se puede calcular por conservación de la energía mecánica (energía en el tramo AB es igual a la energía en el punto de choque sobre el tramo DE) o bien considerando al cilindro como un proyectil disparado en C con una velocidad de 6.15 m/s en un ángulo de 30º. Usando conservación de enrgía directamente es más sencillo:

$$576 \text{ J} = 113.6 \text{ J} + K, \text{ de donde}$$
$$K_{\text{traslación}} = 462.4 \text{ J}.$$

Ud compruebe haciendo el camino largo.

b.- En en el tramo AB son constantes:

La energía de rotación pues gira con velocidad angular constante.
La energía de traslación porque el CM se traslada con v = constante.
La energía mecánica total por los dos argumentos anteriores.
El momento lineal porque su velocidad y masa son constantes.
El momento angular es constante pues si I y ω lo son.

En el tramo BC es constante:

Solo la energía mecánica total pues la fuerza peso es conservativa y la fuerza de roce que interviene es del tipo estática, por tanto no implica una pérdida de energía.

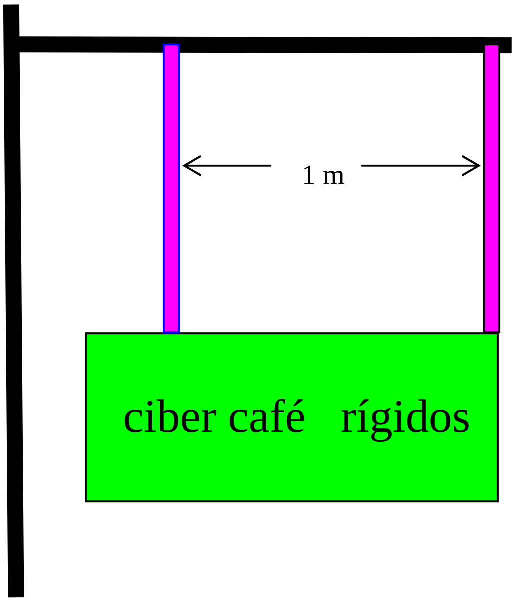
En el tramo CDE son constantes:

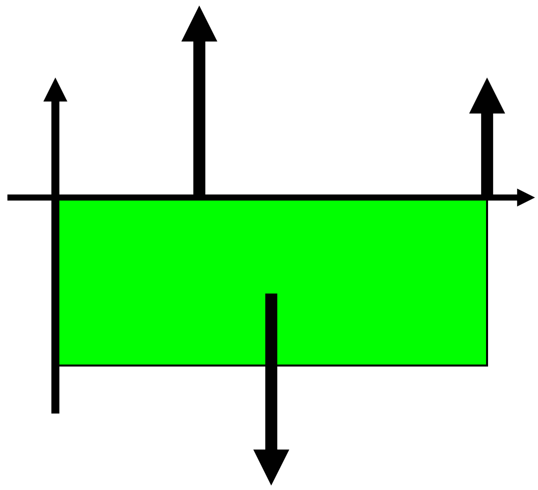
La energía de rotación pues gira con velocidad angular constante.
La energía mecánica total porque la única fuerza que interviene es el peso, que es conservativa.
El momento angular es constante pues si I y ω lo son.

5.- El aviso que se muestra en la figura es un letrero de densidad uniforme, pesa 500 N y posee una longitud de 1.5 m. Es sostenido por dos cuerdas idénticas de longitud 1 m y diámetro 1 cm cada una.

a.- Determine la fuerza que realiza cada cuerda.

b.- Determine la ubicación de la cuerda izquierda si ella puede soporta el doble de tensión que la cuerda de la derecha.





Solución.

a.- Aplicando torque respecto de la esquina superior izquierda del cartel, tal como se muestra en la figura adjunta al aviso comercial:

$$0 = b_1 T_1 - Mg\, b_{CM} + b_2 T_2$$

en donde se conocen todos los brazos y Mg. b_1 es el tramo mas cercano al origen.
Además se debe cumplir la segunda ley de Newton:

$$0 = T_1 - Mg + T_2.$$

Poniendo números resulta

$$T_1 = 375 \text{ N} \quad y \quad T_2 = 125 \text{ N}.$$

b.- Si debe cumplirse que $T_1 = 2T_2$, entonces la cuerda más cercana al origen debe ubicarse a 37.5 cm respecto del origen. Para llegar a este resultado use las dos ecuaciones antes escritas en donde la incógnita es ahora b_1.

Nota. Errores comunicarlos a **jmorales@udec.cl**